Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-coincidente 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) Determine todos los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.

b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-4 & -a-b \\ 4a+4b & b^2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a^2-4=0 \Longrightarrow a=\pm 2 \\ -a-b=0 \Longrightarrow a=-b \\ 4a+4b=0 \Longrightarrow a=-b \\ b^2-4=0 \Longrightarrow b=\pm 2 \end{cases} \xrightarrow{a=-b} \begin{cases} a=2 \text{ y } b=-2 \\ a=-2 \text{ y } b=2 \end{cases}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B^3 = B \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, \dots, B^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & 1-2n \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$B^{10} = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2+2}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Para $a = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Solución:

a) $f'(x) = a + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} \Longrightarrow f'(1) = a + \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow a = 1$

b) $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+2}) = [-\infty+\infty] = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{(x+\sqrt{x^2+2})(x-\sqrt{x^2+2})}{x-\sqrt{x^2+2}} =$
$\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-2}{x-\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x-\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{-2}{-\infty} = 0$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ k & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ -2x^2+x+6 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando $k=1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

a) Las dos ramas son polinómicas y exponencial y la función está definida en todo $\mathbb{R}$. $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.

Para que f sea continua en $x=0$: $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} k = k \\ f(0) = k \end{cases} \Longrightarrow k=1$

Para que f sea continua en $x=2$: $\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} k = k \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-2x^2+x+6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow k=0$

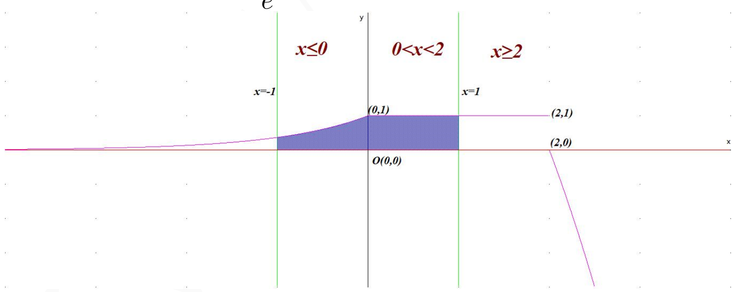
Tenemos dos valores diferentes para k, luego $\nexists\, k\in\mathbb{R}$ que imponga la continuidad de f en $x=0$ y $x=2$ al mismo tiempo.

b) Si $k=1 \Longrightarrow f$ es continua en $x=0$ y tendremos dos recintos de integración $S_1:[-1,0]$ y $S_2:[0,1]$

$S_1 = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\big]_{-1}^{0} = 1-\dfrac{1}{e}$

$S_2 = \int_{0}^{1} dx = x\big]_0^1 = 1$

$S = |S_1|+|S_2| = 2-\dfrac{1}{e} \simeq 1,6321\ u^2$



Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2-6}{x^2+3}$$

a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

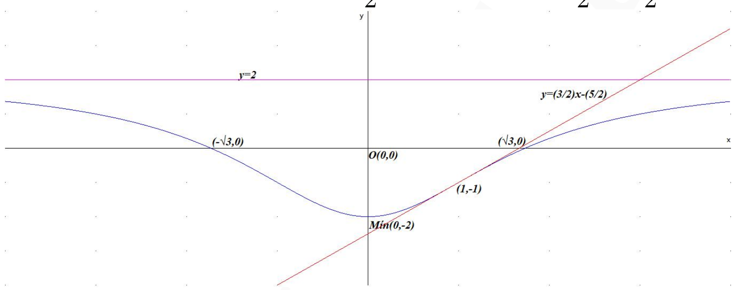
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.
Monotonía: $f'(x) = \dfrac{24x}{(x^2+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el $(-\infty, 0)$ con un mínimo relativo en el punto $(0, -2)$
Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 2$.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-6}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-6}{x^2+3} = 2$$
- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(1) = -1$
$f'(x) = \dfrac{24x}{(x^2+3)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = \dfrac{3}{2}$
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y + 1 = \dfrac{3}{2}(x-1) \Longrightarrow y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$

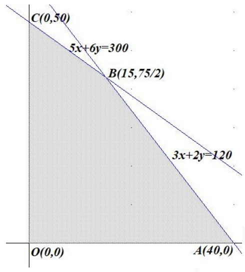


Problema 5 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, $P1$ y $P2$. Cada kg de $P1$ contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso $P1$ le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso $P2$ de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?
Solución:
Sean x kg de pienso $P1$ e y kg de pienso $P2$.

	cereales	leguminosas	adicionales	beneficio
$P1$	500	300	200	1 €
$P2$	600	200	200	2 €
	≤ 30000	≤ 12000	≥ 0	

Los componentes adicionales no aportan restricción alguna.

- La región factible S es:

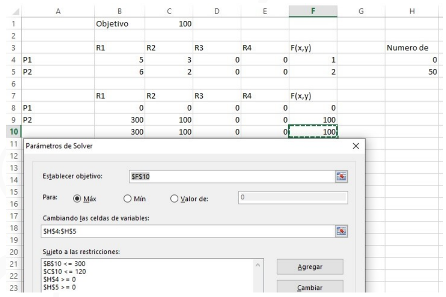


$$\begin{cases} 500x + 600y \le 30000 \\ 300x + 200y \le 12000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 6y \le 300 \\ 3x + 2y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:
$O(0,0)$, $A(40,0)$, $B(15,75/2)$y $C(0,50)$.

- La función objetivo es $f(x,y) = x + 2y \Longrightarrow$

Solución por solver



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 40 \\ f(15,75/2) = 90 \\ f(0,50) = 100 \Longleftarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio se alcanza con 0 kg de pienso $P1$ y 50 kg de $P2$ y es de 100 €.

Problema 6 *(2 puntos)* De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.
Solución:
Sean x el número de novelas, y de biografías y z de autoayudas.

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ z = \dfrac{x}{2} \\ y + 5 = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 90 \\ x - 2z = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 38\,\% \\ y = 33\,\% \\ z = 19\,\% \end{cases}$$

Se han prestado 38 % novelas, 33 % biografías y 19 % autoayudas.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & -2 & -1 & -85 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & 0 & 5 & 95 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 5z = 95 \Longrightarrow z = 19 \\ -y - 57 = -90 \Longrightarrow y = 33 \\ x + 33 + 19 = 90 \Longrightarrow x = 38 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 38\,\% \\ y = 33\,\% \\ z = 19\,\% \end{cases}$$

Problema 7 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + (a+1)z = 1 \\ 2x - az = 2 \\ (a+2)x - ay = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{array} \right); \quad |A| = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 2$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -4 \end{array} \right.$$

Problema 8 *(2 puntos)* El 80 % de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35 % de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70 % de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.

b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

Solución:

Sean A prendas producidas en Asia e I producidas con mano de obra infantil.
$P(A) = 0,8$, $P(I|A) = 0,35$ y $P(A \cup I) = 0,7$

a) $P(A \cap I) = P(I|A)P(A) = 0,8 \cdot 0,35 = 0,28$

b) $P(A \cup I) = P(A) + P(I) - P(A \cap I) \Longrightarrow 0,7 = 0,8 + P(I) - 0,28 \Longrightarrow P(I) = 0,18$

$$P(\overline{A}|\overline{I}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(\overline{A \cup I})}{1 - P(I)} = \frac{1 - P(A \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0,7}{1 - 0,18} = 0,3659$$

Problema 9 *(2 puntos)* Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 34,5744 \Longrightarrow n = 35$

b) $\mu = 32 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(32; \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(32; 0,75)$.
$P(\overline{X} \le 30,5) = P\left(Z \le \frac{30,5 - 32}{0,75}\right) = P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

Problema 10 *(2 puntos)* En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20 % de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5 % de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50 % de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45 % de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50 %, 40 % y 10 %, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

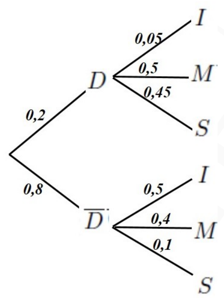
a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.

b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.

Solución:
Sean D país desarrollado, $\overline{D}$ país no desarrollado, I tiene una esperanza de vida inferior a 70 años, M tiene una esperanza de vida entre 70 y 75 años y S tiene una esperanza de vida superior a 75 años.

a) $P(I) = P(I|D)P(D) + P(I|\overline{D})P(\overline{D}) =$
$0,05 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,41$

b) $P(\overline{D}|I) = \dfrac{P(I|\overline{D})P(\overline{D})}{P(I)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,8}{0,41} = 0,9756$



www.musat.ro