Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-coincidente 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) Determine todos los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.

b) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = ax + \sqrt{x^2 + 2}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tome el valor $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) Para $a = 1$, calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ k & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -2x^2 + x + 6 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Determine, si es posible, el valor del parámetro real k para que esta función sea continua en todo su dominio.

b) Considerando $k = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6}{x^2 + 3}$$

a) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Problema 5 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos produce 2 tipos de pienso para ganado, $P1$ y $P2$. Cada kg de $P1$ contiene 500 gramos de cereales, 300 de leguminosas y 200 de otros componentes adicionales. Cada kg de P2 contiene 600 gramos de cereales, 200 de leguminosas y 200 de otros componentes. Se dispone de 30 kg de cereales y 12 kg de leguminosas. Los componentes adicionales no están restringidos. Un kg de pienso $P1$ le da un beneficio de 1 euro y un kg de pienso $P2$ de 2 euros. ¿Cuántos kg de pienso de cada tipo debe fabricar para maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

Problema 6 *(2 puntos)* De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

Problema 7 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 2y + (a+1)z = 1 \\ 2x - az = 2 \\ (a+2)x - ay = 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Problema 8 *(2 puntos)* El 80 % de las prendas producidas por una cadena de ropa se fabrican en Asia y, desafortunadamente, el 35 % de las prendas producidas por esa cadena se han fabricado usando mano de obra infantil. Además, el 70 % de las prendas analizadas se fabrican en Asia o se han fabricado usando mano de obra infantil. Eligiendo una prenda de esa cadena al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Se haya fabricado en Asia y se haya fabricado usando mano de obra infantil.

b) No se haya fabricado en Asia, sabiendo que no se ha fabricado usando mano de obra infantil.

Problema 9 *(2 puntos)* Un supermercado ha determinado que el tiempo que pasa un cliente en su establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 32$. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ clientes el tiempo medio que han pasado en su establecimiento, $\overline{X}$, sea menor de 30,5 minutos.

Problema 10 *(2 puntos)* En un estudio sobre desarrollo sostenible de la OCDE se ha observado que el 20 % de los países son desarrollados. Si el país es desarrollado tiene una probabilidad del 5 % de tener una esperanza de vida inferior a 70 años, del 50 % de tener una esperanza de vida de 70 a 75 años y un 45 % de que la esperanza de vida sea superior a los 75 años. Si el país no pertenece al grupo de los países desarrollados, esas probabilidades son 50 %, 40 % y 10 %, respectivamente. Eligiendo al azar un país, calcule la probabilidad de que:

a) La esperanza de vida sea inferior a 70 años.

b) Sabiendo que la esperanza de vida es inferior a 70 años, el país no pertenezca al grupo de los países desarrollados.