Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices M, P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \ \text{ y } \ (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$$

b) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Solución:

a) $M \cdot N = 2N \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2b - a \\ 2 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$\left[\begin{pmatrix} -a + 2c & -b + 2 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -c - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2c \\ -b + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -c - 3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -2a - 3b + 2c \\ -b - c - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tenemos:

$$\begin{cases} 2b - a = -2 \\ 2 - c = 4 \\ -2a - 3b + 2c = -1 \\ -b - c - 1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$M + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Luego $M^2 = M + 2I$.

$M^2 = M + 2I \Longrightarrow M^2 - M = 2I \Longrightarrow \dfrac{1}{2}M(M - I) = I \Longrightarrow M^{-1} = \dfrac{1}{2}(M - I) =$
$\dfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^3 = MM^2 = M(M + 2I) = M^2 + 2M = M + 2I + 2M = 3M + 2I =$
$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)*

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)\, dx = \frac{2}{3}$$

b) Sea $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - b & \text{si} & x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$ Determine para qué valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^{1/2} - a)\, dx = \left.\frac{2x^{3/2}}{3} - ax\right]_0^1 = \frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \Longrightarrow a = 0$

b) Las dos ramas son polinómicas y en $x = 0$ la función está definida. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para que f sea continua en $x = 0$: $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - b) = -b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (3x + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow b = -2$

Tenemos:

$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 + 2 & \text{si} & x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x & \text{si} & x < 0 \\ 3 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Problema 3 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

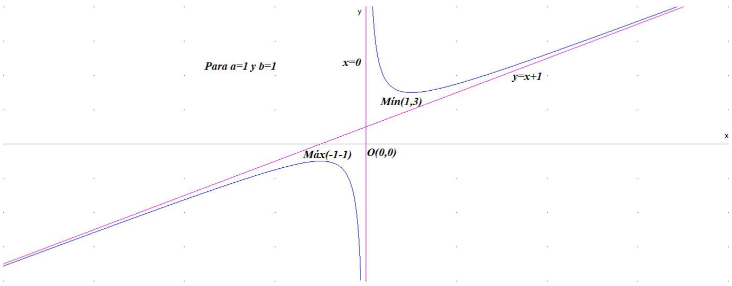
a) $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\, dx = \frac{1}{x} + ax + b$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 3 \Longrightarrow 1 + a + b = 3 \Longrightarrow a + b = 2 \\ f(2) = \dfrac{7}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2} + 2a + b = \dfrac{7}{2} \Longrightarrow 2a + b = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} + 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ y decreciente en el $(-1, 0)\cup(0, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
  - En $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty$$

  - En $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$.

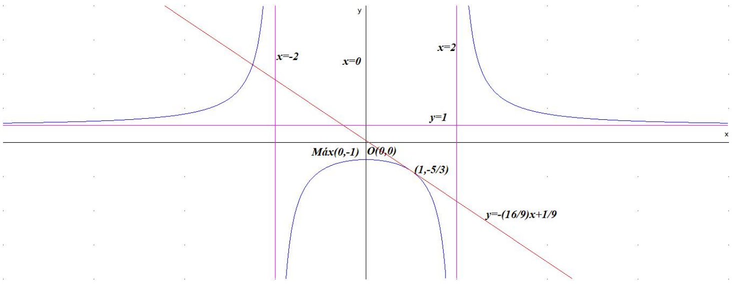
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(1) = -\dfrac{5}{3}$

$f'(x) = -\dfrac{16x}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{16}{9}$

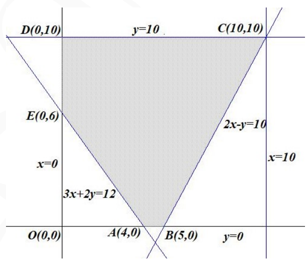
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y + \dfrac{5}{3} = -\dfrac{16}{9}(x-1) \Longrightarrow y = -\dfrac{16}{9}x + \dfrac{1}{9}$



Problema 5 *(2 puntos)* De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?
Solución:
Sean x el primer número e y el segundo.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 10 \\ 2x - y \le 10 \\ 3x + 2y \ge 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y \le 10 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x \le 10 \\ y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



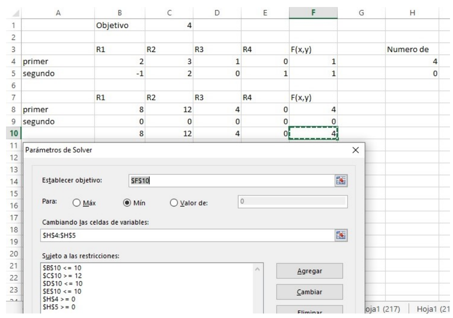
Los vértices a estudiar serán:
$A(4,0)$, $B(5,0)$, $C(10,10)$, $D(0,10)$ y $E(0,6)$

- La función objetivo es $f(x,y) = x + y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(4,0) = 4 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(5,0) = 5 \\ f(10,10) = 20 \\ f(0,10) = 10 \\ f(0,6) = 6 \end{cases}$$

La mínima suma se obtiene cuando el primer número es 4 y el segundo es 0 con una suma de 4.

Solución por solver



Problema 6 *(2 puntos)* En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.
Solución:

Sean x el número de guitarras, y de pianos y z de violines.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ y+z=x \\ z+2y+4x=180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x-y-z=0 \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=35 \\ y=5 \\ z=30 \end{array}\right.$$

Tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & 0 & -1 & -30 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=30 \\ -2y-60=-70 \Longrightarrow y=5 \\ x+5+30=70 \Longrightarrow x=35 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=35 \\ y=5 \\ z=30 \end{array}\right.$$

Problema 7 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{array}\right); \quad |A|=7a-21=0 \Longrightarrow a=3$$

- Si $a \in \mathbb{R}-\{3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2-3F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a=3$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+3z=2 \\ -y-7z=-6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2+2\lambda \\ y=6-7\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 8 *(2 puntos)* La observación metereológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.

b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Solución:
Sean N nublado y B por debajo de 10 grados.
$P(N) = 0,5$, $P(B) = 0,07$ y $P(N \cup B) = 0,35$

a) $P(N \cap B) = P(N) + P(B) - P(N \cup B) = 0,5 + 0,07 - 0,35 = 0,22$

b) $P(\overline{N}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{N} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(\overline{N \cup B})}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - P(N \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - 0,35}{1 - 0,07} = 0,6989$

Problema 9 *(2 puntos)* El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 65$ y $NC = 0,99$:
$0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{8}{\sqrt{20}} = 4,6063$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (65 - 4,6063; 65 + 4,6063) = (60,3937; 69,6063)$

b) $\mu = 67 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(67; \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(67; 2,53)$.
$P(65 \le \overline{X} \le 69) = P\left(\dfrac{65 - 67}{2,53} \le Z \le \dfrac{69 - 67}{2,53}\right) = P(-0,79 \le Z \le 0,79) =$
$P(Z \le 0,79) - P(Z \le -0,79) = P(Z \le 0,79) - (1 - P(Z \le 0,79)) = 2P(Z \le 0,79) - 1 =$
$2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$

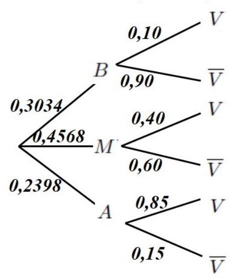
Problema 10 *(2 puntos)* Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98 %de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85 %.
Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Solución:
Sean B renta inferior a 1500 euros, M renta entre 1500 y 3000 euros, A renta superior a 3000 euros, V viaja de vacaciones y $\overline{V}$ no viaja de vacaciones.

a) $P(V) = P(V|B)P(B) + P(V|M)P(M) + P(V|A)P(A) =$
$0,10 \cdot 0,3034 + 0,40 \cdot 0,4568 + 0,85 \cdot 0,2398 = 0,4169$



b) $P(M \cup A|V) = \dfrac{P((M \cup A) \cap V)}{P(V)} =$
$\dfrac{P(V|M)P(M) + P(V|A)P(A)}{P(V)} =$
$\dfrac{0,40 \cdot 0,4568 + 0,85 \cdot 0,2398}{0,4169} = 0,9272$