Examen de Matemáticas 2$^{\underline{o}}$Bachillerato(CS)
Mayo 2024

Problema 1 (2 puntos) El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, $V(t)$, durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \quad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. (1,25 puntos)

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. (0,75 puntos)

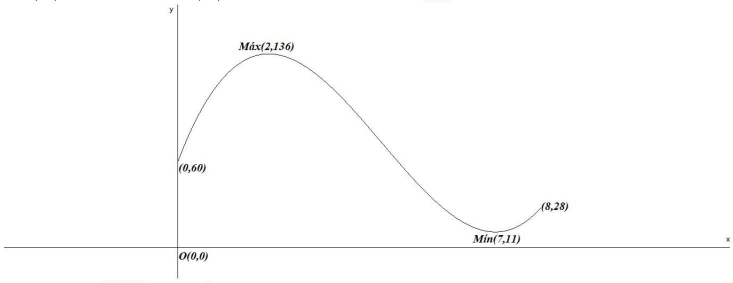
Solución:

a) $V'(t) = 84 - 54t + 6t^2 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 7$

	$(0,2)$	$(2,7)$	$(7,8)$
$V'(t)$	$+$	$-$	$+$
$V(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El valor de las acciones crece en el intervalo horario de $(0,2) \cup (7,8)$ y decrece en el $(2,7)$

b) $V(0) = 60$ y $V(8) = 28$, la evolución seguiría la siguiente gráfica:



Problema 2 (2 puntos) Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Solución:

- ☛ Para dibujar la función calculamos $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow (2, 1)$ es un máximo relativo. Dibujamos con los puntos de corte con OY : hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$ y con OX : hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = (1, 0)$ y $(3, 0)$

- ☛ $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$. Los dos puntos se encuentran dentro del recinto de integración y tendremos tres: $S_1 : [0, 1]$, $S_2 : [1, 3]$ y $S_3 : [3, 4]$.

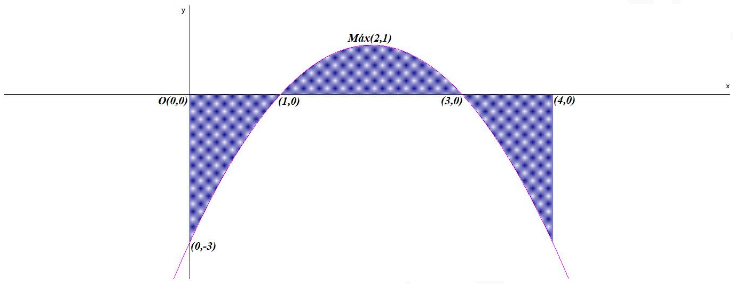
$$F(x) = \int (-x^2 + 4x - 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

$$S_1 = \int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = F(1) - F(0) = F(1) - F(0) = -\frac{4}{3} - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$S_1 = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = F(3) - F(1) = F(3) - F(1) = 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$S_1 = \int_3^4 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = F(4) - F(3) = F(4) - F(3) = -\frac{4}{3} - 0 = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4\ u^2$$



Problema 3 (2 puntos) Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \qquad 0 \le x \le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Solución:

$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \Longrightarrow P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B$

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) = 13 \Longrightarrow -1 + 3A - 3B + 23 = 13 \Longrightarrow A - B = -3 \\ P'(1) = 0 \Longrightarrow -3 + 6A - 3B = 0 \Longrightarrow 2A - B = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 4 \\ B = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$P(x) = -x^3 + 12x^2 - 21x + 23 \Longrightarrow P'(x) = -3x^2 + 24x - 21$$

$P''(x) = -6x + 24 \Longrightarrow P''(1) = 18 > 0 \Longrightarrow x = 1$ es un mínimo relativo.
Tenemos $P(0) = 23$, $P(1) = 13$ y $P(10) = 13 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 10$ son mínimos absolutos.

Problema 4 (2 puntos) Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100 \quad 0 \le x \le 25; \qquad E(x) = -x^2 + 10x + 200 \quad 0 \le x \le 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) (0,5 puntos) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra.

b) (1,5 puntos) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos.

Solución:

a) $G(x) = S(x)+E(x) = (10x+100)+(-x^2+10x+200) = -x^2+20x+300 \quad 0 \le x \le 25$

b) $G'(x) = -2x + 20 = 0 \Longrightarrow x = 10$
$G''(x) = -2 \Longrightarrow G''(10) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 10$ es un máximo relativo.
Tenemos $G(0) = 300$, $G(10) = 400$ y $G(25) = 175$. Luego el máximo relativo calculado es también absoluto y se encuentra cuando la separación del centro es de 10 Km con un coste de 400000€. El mínimo coste se produce cuando la separación del centro es de 25 km y es de 175000€

Problema 5 (2 puntos) Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2-6x+8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Solución:

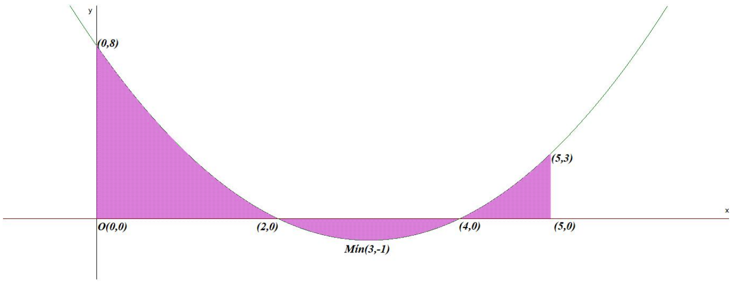
Buscamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 4$. El punto $x = 2$ y el $x = 4$ se encuentran dentro del intervalo $[0, 5]$ de integración, luego tendremos tres recintos de integración S_1 en $[0, 2]$, S_2 en $[2, 4]$ y S_3 en $[4, 5]$.

$$S_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_0^2 = \frac{20}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_2^4 = -\frac{4}{3}$$

$$S_3 = \int_4^5 f(x)\,dx = \int_4^5 (x^2 - 6x + 8)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_4^5 = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \left|\frac{20}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{28}{3} \simeq 9,3333 \ u^2$$



Para dibujar la gráfica: hemos calculado el punto de corte con el eje de ordenadas $(0,8)$, el extremo relativo $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y como $f''(x) = 2 > 0 \Longrightarrow$ $(3,-1)$ es un mínimo relativo y un punto $(5,3)$