Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Abril 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) (0,25 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) (0,25 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) (0,75 puntos) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Solución:
Sean C cara y X cruz.

a) Cada tres casos posibles dos son favorables: $P(C) = \dfrac{2}{3}$

b) $P(C \cap X) + P(X \cap C) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

c) $P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(X \cap X) = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

d) Sea A :“al menos una cara” y $B : C \cap C$:
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{2}$$

Problema 2 (2,5 puntos) En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra “lottery” ha aparecido en el 40 % de los correos que son spam y en el 0,6 % de los correos que no lo son.

a) (1 puntos) Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra “lottery” sea spam.

b) (0,25 puntos) Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra “lottery” no sea spam.

c) (0,75 puntos) Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra “lottery” y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Solución:

Sean L "lottery" y S spam.

$P(S) = 0,2$, $P(L|S) = 0,4$ y $P(L|\overline{S}) = 0,006$.

$P(\overline{S}) = 0,8$, $P(L \cap S) = P(L|S)P(S) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$ y $P(L \cap \overline{S}) = P(L|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,006 \cdot 0,8 = 0,0048$

	L	$\overline{L}$	Total
S	$0,08$		$0,2$
$\overline{S}$	$0,0048$		$0,8$
Total	$0,0848$		1

$\Longrightarrow$

	L	$\overline{L}$	Total
S	$0,08$	$0,12$	$0,2$
$\overline{S}$	$0,0048$	$0,7952$	$0,8$
Total	$0,0848$	$0,9152$	1

a) $P(S|L) = \dfrac{P(S \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0,08}{0,0848} = 0,9434$

b) $P(\overline{S}|\overline{L}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \dfrac{0,7952}{0,9152} = 0,8689$

c) $P(\overline{S} \cap L) + P(S \cap \overline{L}) = 0,0048 + 0,12 = 0,1248$

Problema 3 (2,5 puntos) Se pide:

a) (1 puntos) Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) (1 puntos) En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6,4 puntos con una desviación típica de 0,7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.
b1) (0,25 puntos) Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.
b2) (0,75 punto) Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6,3 y 6,8 puntos.

Solución:

a) $n = 250 + 300 + 400 + 350 = 1300$
$\dfrac{20 \cdot 1300}{250} = 104$ de toda la población.
$\dfrac{20 \cdot 300}{250} = 24$ del segundo estrato.
$\dfrac{20 \cdot 400}{250} = 32$ del tercer estrato.

$\dfrac{20 \cdot 350}{250} = 28$ del cuarto estrato.
$24 + 32 + 28 = 104$

b) $N(6,4; 0,7)$

b1) $\overline{X} \approx \left(6,4; \dfrac{0,7}{\sqrt{49}}\right) = N(6,4; 0,1)$

b2) $P(6,3 \leq \overline{X} \leq 6,8) = P\left(\dfrac{6,3-6,4}{0,1} \leq Z \leq \dfrac{6,8-6,4}{0,1}\right) = P(-1 \leq Z \leq 4) =$
$P(Z \leq 4) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 4) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0,99997 - (1 - 0,8413) =$
$0,84127$

Problema 4 (2 puntos) Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) (1 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98 %, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) (1 puntos) Si el nivel de confianza es del 95 %, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Solución:

$$n = 400 \;\; \hat{p} = \frac{64}{400} = 0,16, \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,84$$

a) $NC = 98\,\% = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,325\sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{400}} = 0,0426$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,16-0,0426; 0,16+0,0426) = (0,1174; 0,2026) = (11,74\,\%, 20,26\,\%)$

b) $NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{400}} = 0,0360$$

El error ha disminuido al disminuir el nivel de confianza.

Problema 5 (2 puntos) Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

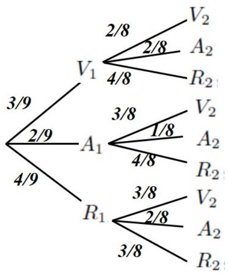
c) (1 punto) Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Solución:

Sean V_1 verde en la primera extracción, A_1 azul en la primera extracción, R_1 rojo en la primera extracción, V_2 verde en la segunda extracción, A_2 azul en la segunda extracción y R_2 rojo en la segunda extracción.

a) $P(\text{primero o segundo premio}) = P(A_1 \cap A_2) + P(V_1 \cap V_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(V_2|V_1)P(V_1) = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9} \simeq 0,1111$

b) $P(\text{tercer premio}) = P(A_1 \cap V_2) + P(A_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap A_2) + P(R_1 \cap A_2) = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{3}{9} + \dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{4}{9} = \dfrac{7}{18} \simeq 0,3889$



c) Sean A ha obtenido el primer premio, B ha obtenido el segundo y C ha obtenido el tercero.

$P(C|A \cup B \cup C) = \dfrac{P(C \cap (A \cup B \cup C))}{P(A \cup B \cup C)} = \dfrac{P(C)}{P(C \cup (A \cup B))} = \dfrac{\frac{7}{18}}{P(C) + P(A \cup B) - P(C \cap (A \cup B))} = \dfrac{\frac{7}{18}}{\frac{7}{18} + \frac{1}{9} - 0} = \dfrac{7}{9} \simeq 0,7778$