Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Marzo 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \le t \le 6$, donde t es el tiempo (en horas).

a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?

b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

Solución:

a) $f(3) = 200$ vatios.
$f(t) = -32t^2 + 352t - 568 < 272 \Longrightarrow (-\infty; 3,5) \cup (7,5; \infty)$, como tiene que ser en el intervalo $[3,6] \Longrightarrow (3; 3,5)$ es donde $f(t) < 272$ vatios

b) $f'(t) = -64t + 352 = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{11}{2}$
$f''(t) = -64 \Longrightarrow f''(5,5) = -64 < 0 \Longrightarrow t = \dfrac{11}{2}$ horas es un máximo relativo con $f\left(\dfrac{11}{2}\right) = 400$ vatios.
Tenemos $f(3) = 200$ y $f(6) = 392$, luego el máximo calculado es absoluto.

Problema 2 (2,5 puntos) Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{2x-1} & x > 1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$, dibujando el recinto correspondiente.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
En la rama $x \le 1$ la función es un polinomio y, por tanto, continua en toda la rama.
En la rama $x > 1$ el denominador de la función se anula en $x = \dfrac{1}{2} \notin \{x > 1\} \Longrightarrow$

continua en toda la rama.
Continuidad en $x = 1$:

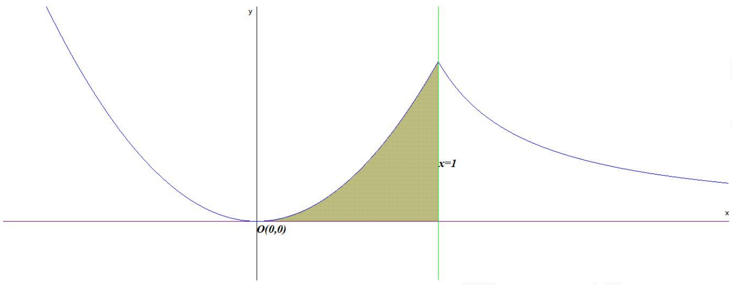
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2x-1} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

Luego f continua en $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) En $[0, 1] \Longrightarrow f(x) = x^2$ la función no tiene punto de corte con el eje OX en el interior del intervalo, luego el área de integración es $S_1 : [0, 1]$

$S_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$S = |S_1| = \dfrac{1}{3} \simeq 0,333\ u^2$



Problema 3 (2,5 puntos) En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

a) (1,25 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.

b) (1,25 puntos) Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

Solución:

$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x} = \frac{2x^2 + 720x + 80000}{x} \Longrightarrow c'(x) = \frac{2(x^2 - 40000)}{x^2}$$

a) $c'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm 200$, la solución negativa está fuera del dominio de la función y es irrelevante.

	$(0, 200)$	$(200, \infty)$
$c'(x)$	$-$	$+$
$c(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Los costes son decrecientes hasta las 200 Tm, el intervalo $(0, 200)$. Los costes son crecientes a partir de las 200 Tm, el intervalo $(200, \infty)$.

b) Hay un mínimo relativo en $x = 200$ Tm y es de $c(200) = 1520000$€. Tenemos $c(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2 + 720x + 80000}{x} = \left[\dfrac{80000}{0^+}\right] = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 720x + 80000}{x} = \infty$, luego el mínimo anterior es absoluto.

Problema 4 (2,5 puntos) Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) (1,25 puntos) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

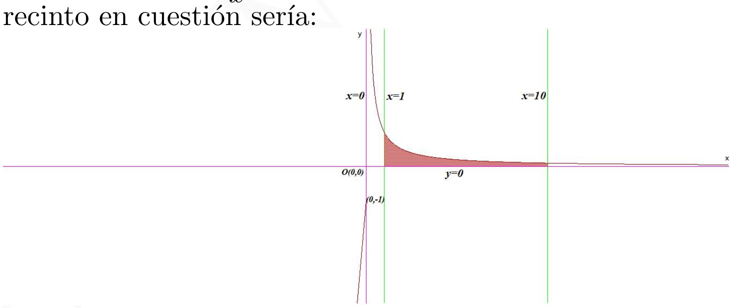
Solución:

a) Las dos ramas son continuas, hay que imponer la continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (6x - 1) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = \infty \\ f(0) = 11 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \ne \lim_{x\to 0^+} f(x) \Longrightarrow$$

f es discontinua no evitable en $x = 0$, donde hay un salto infinito entre las dos ramas.
La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) En el recinto indicado es $f(x) = \dfrac{1}{x}$, función siempre positiva sin corte con el eje de abscisas, con una asíntota vertical en $x = 0$ y una horizontal en $y = 0$.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
Como $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Longrightarrow f$ no tiene extremos y es siempre decreciente. El recinto en cuestión sería:



$$S = \int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\Big]_1^{10} = \ln 10 \simeq 2,3026\ u^2$$