# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

**Febrero 2024**

---

**Problema 1** (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{x-1}$$

b) (1,25 puntos) Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad 0,5 \le x < 1 \\ ax^2+b & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ e^x+1 & \text{si} \quad 2 \le x < 2,5 \end{cases}$$

Determine los parámetros $a$ y $b$ para que $f$ sea continua en el intervalo $[0,5; 2,5]$.

**Solución:**

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty$
- Horizontales: No hay $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-1}{x-1} = +\infty$
- Oblicuas: $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-1+2x}{x-1} = 2$$

$$y = x+2$$

b) Las ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$:

- En $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2+b) = a+b \\ f(1) = a+b \end{array}\right. \Longrightarrow a+b=1$$

☛ En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2+b) = 4a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (e^x+1) = e^2+1 \\ f(2) = e^2+1 \end{cases} \Longrightarrow 4a+b = e^2+1$$

☛ $$\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b = e^2+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{e^2}{3} = 2,463018699 \\ \\ b = \dfrac{3-e^2}{3} = -1,463018699 \end{cases}$$

**Problema 2** (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función $P(t)$, donde $t \in [0,36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de $P(t)$ y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuantos pacientes hay en ese momento?

b) (1,25 puntos) En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2€, y el precio de venta de $x$ hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122-x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500€. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

**Solución:**

a) $P(t) = \displaystyle\int (t^2 - 40t + 231) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + C$
$P(36) = -2052 + C = 448 \Longrightarrow C = 2500$
$P(t) = \dfrac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + 2500$
$P(0) = 2500$ y $P(36) = 448$
$P'(t) = t^2 - 40t + 231 = 0 \Longrightarrow t = 7$ y $t = 33$
$P''(t) = 2t - 40 \Longrightarrow \begin{cases} P''(7) = -26 < 0 \Longrightarrow t = 7 \text{ Máximo relativo} \\ P''(33) = 26 > 0 \Longrightarrow t = 33 \text{ Mínimo relativo} \end{cases}$
La función es creciente en el intervalo $(0,7)\cup(33,36)$ y es decreciente en el $(7,33)$.
Cuando $t = 33$ horas hay $P(33) = 322$ pacientes y este mínimo es absoluto.

b) $B(x) = P(x) - C(x) - 500 = x(122-x) - 2x - 500 = -x^2 + 120x - 500$
$B'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$
$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow (60, 3100)$ es un máximo relativo.
Debería producir 60 hogazas con un beneficio de 3100€

**Problema 3** (2,5 puntos) Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

b) ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

c) Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes $OX$ y $OY$, así como los puntos de corte entre $f$ y $g$.

d) Calcule el área de la región que queda encerrada entre las funciones $f$ y $g$.

**Solución:**

a) Monotonía:

- ☛ $f(x) = -x^2 + 6x \Longrightarrow f'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$

| | $(-\infty, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ |

La función es decreciente en el intervalo $(3, +\infty)$ y creciente en $(-\infty, 3)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(3, 9)$

- ☛ $g(x) = x^2 - 2x \Longrightarrow g'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

| | $(-\infty, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $+$ |
| $g(x)$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

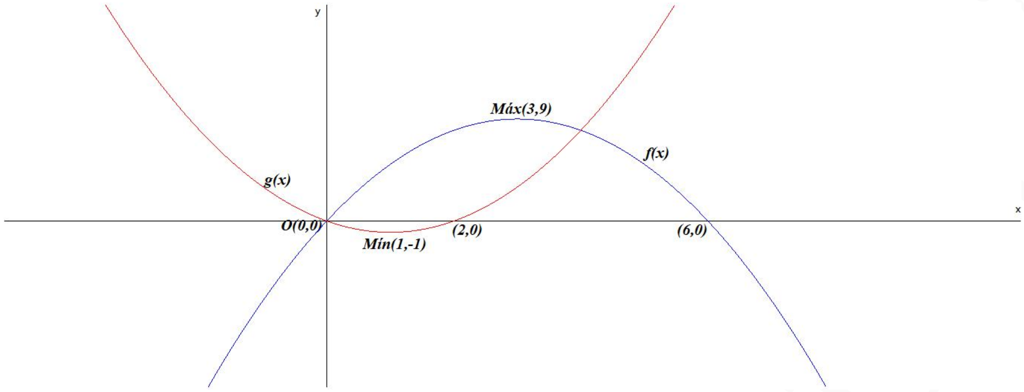
La función es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$

b) ☛ El máximo relativo de $f(x)$ es absoluto en el punto $(3, 9)$

☛ El mínimo relativo de $g(x)$ es absoluto en el punto $(1, -1)$

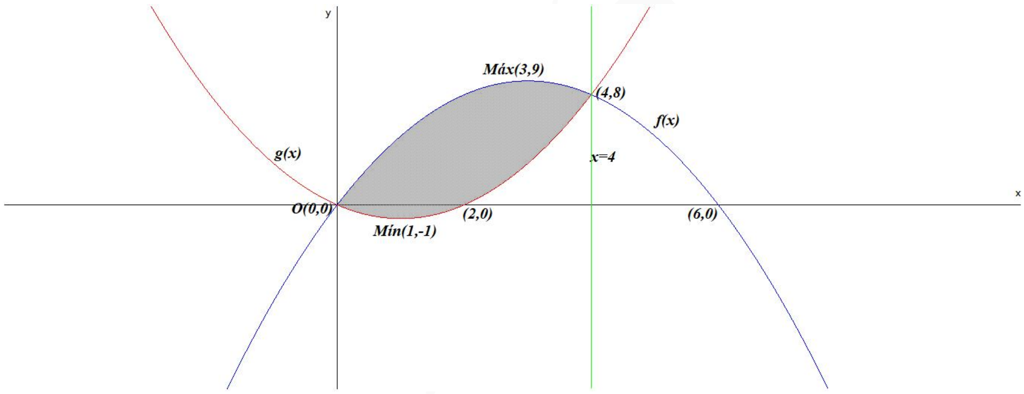
c) Puntos de corte:

- ☛ $f(x) = -x^2 + 6x$
  - Con $OY$ hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  - Con $OX$ hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(6, 0)$
- ☛ $g(x) = x^2 - 2x$
  - Con $OY$ hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  - Con $OX$ hacemos $g(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(2, 0)$




d) Entre las dos curvas:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 6x = x^2 - 2x \Longrightarrow -2x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 4$
Los puntos de corte serían $(0,0)$ y $(4,8)$

e) $$S = \left| \int_0^4 (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\, dx \right| = \left| -\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \Big]_0^4 \right| =$$
$$\left| \frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3} \simeq 21,333\ u^2$$




**Problema 4** (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0,6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?

b) (1,25 puntos) En una sastrería familiar, el coste total que supone producir $x$ pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos $x$ pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

**Solución:**

a) $P'(t) = 60t - 240 = 0 \Longrightarrow t = 4$

| | $(0,4)$ | $(4,6)$ |
|---|---|---|
| $P'(t)$ | $-$ | $+$ |
| $P(t)$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

La función es decreciente en el intervalo $(0,4)$ y creciente en el $(4,6)$. Presenta un mínimo relativo que también es absoluto en el punto $(4,2520)$.
El momento en el que hay menos fruta en el almacén es cuando han transcurrido 4 horas y hay 2520 kg.

b) El beneficio $B(x) = P(x) - C(x) = x(200 - x) - (120x + 700) = -x^2 + 80x - 700$
$B'(x) = -2x + 80 = 0 \Longrightarrow x = 40$.
$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(40) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 40$ es un máximo relativo que también es absoluto.
El beneficio es máximo con la producción de 40 pantalones y es de $B(40) = 900$€.