Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2024

Problema 1 (2,5 puntos) La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & \text{si} \quad 3 < x \le 10 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) (1,75 puntos) Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[1, 10]$. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Solución:

a) ☛ Las ramas son polinomios y son continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar la continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (22 + ax) = 22 + 3a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (100 + 10x + bx^2) = 130 + 9b \\ f(3) = 22 + 3a \end{cases} \Longrightarrow 22+3a = 130+9b \Longrightarrow a-3b = 36$$

☛ En $f(3) = 22 + 3a = 112 \Longrightarrow a = 30$.

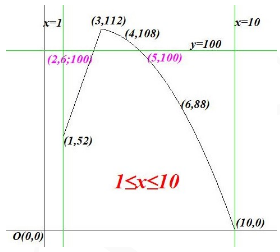
☛

$$\begin{cases} a - 3b = 36 \\ a = 30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = -2 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 22 + 30x & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x - 2x^2 & \text{si} \quad 3 < x \le 10 \end{cases}$$

Se hace una tabla de valores $f(1) = 52 \Longrightarrow (1, 52)$, $f(3) = 112 \Longrightarrow (3, 112)$, $f(4) = 108 \Longrightarrow (4, 108)$, $f(6) = 88 \Longrightarrow (6, 88)$ y $f(10) = 0 \Longrightarrow (10, 0)$.
Si el beneficio ha sido de 100 euros $f(x) = 100$ y pueden ser dos valores:



- ☛ $22 + 30x = 100 \Longrightarrow x = 2,6 \Longrightarrow (2,6; 100)$ El beneficio de 100000€ se produce con la producción de 2,6 toneladas.

- ☛ $100 + 10x - 2x^2 = 100 \Longrightarrow x = 0$ (no relevante) y $x = 5 \Longrightarrow (5, 100)$ El beneficio de 100000€ se produce con la producción de 5 toneladas.

El beneficio mínimo será de 0€ cuando la producción sea de 10 toneladas y será máximo con 112000€ cuando la producción sea de 3 toneladas.

Problema 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 3$.

Solución:

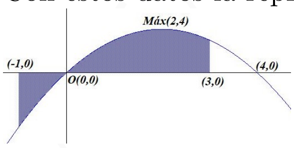
a) $F(x) = \int (-x^2 + 4x)\, dx = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + C$
$F(1) = -\dfrac{1}{3} + 2 + C = 2 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + \frac{1}{3}$$

b) La función es una parábola y $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$
  $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow (2, 4)$ es un máximo relativo (el vértice de la parábola)

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



Tendríamos dos recintos: S_1 en $[-1, 0]$ y S_2 en $[0, 3]$ con $S = |S_1| + |S_2|$
Tenemos: $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = 0 - \frac{7}{3} = -\frac{7}{3}$$
$$S_2 = \int_{0}^{3} f(x)\,dx = F(3) - F(0) = 9 - 0 = 9$$
$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3} \simeq 11,33\ u^2$$

Problema 3 (2,5 puntos) El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) (1,75 puntos) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

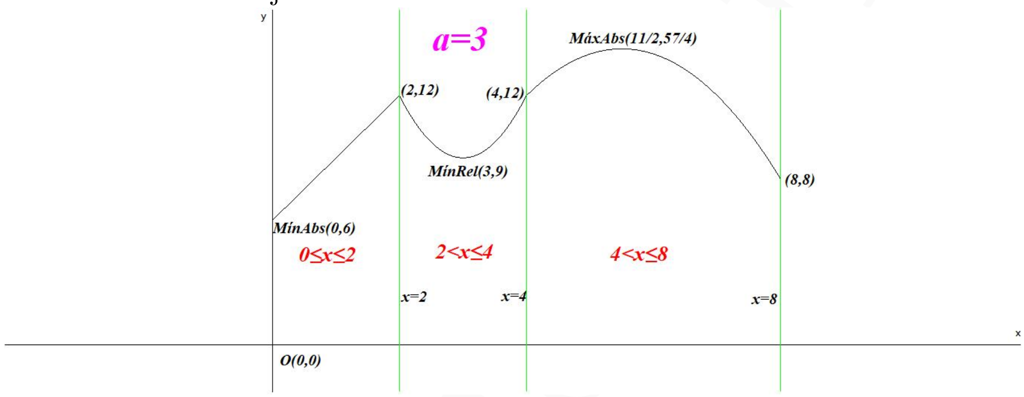
Solución:

a) Continuidad de f:

- Las tres ramas son polinomios y, por tanto, son continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$ y en $x = 4$
- Continuidad en $x = 2$:
$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} a(x+2) = 4a \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 12 \\ f(2) = 12 \end{cases} \Longrightarrow 4a = 12 \Longrightarrow a = 3.$$
La función es continua en $x = 2$ siempre que $a = 3$
- Continuidad en $x = 4$:
$$\begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 3(x^2 - 6x + 12) = 12 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (-x^2 + 11x - 16) = 12 \\ f(4) = 12 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) =$$
$f(4) \Longrightarrow$.
La función es continua en $x = 4$.
- La función es continua en $\text{Dom}(f) = [0, 8]$ siempre que $a = 3$. Si $a \neq 3$ la función sería continua en $[0, 3) \cup (3, 8]$

b) Si $a = 3$: $f(x) = \begin{cases} 3(x+2) & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \end{cases}$

- ☛ La rama $0 \leq x \leq 2$ es una recta que une los puntos $(0, 6)$ y $(2, 12)$
- ☛ La rama $2 < x \leq 4$ es una parábola entre $(2, 12)$ y $(4, 12)$, con un punto intermedio en $(3, 9)$. Además $f'(x) = 3(2x-6) = 0 \Longrightarrow x = 3$ como $f''(x) = 6$ es $f''(3) = 6 > 0 \Longrightarrow (3, 9)$ es un mínimo relativo, pero no absoluto.
- ☛ La rama $4 < x \leq 8$ es una parábola entre $(4, 12)$ y $(8, 8)$, con un punto intermedio en $(11/2, 57/4)$. Además $f'(x) = -2x + 11 = 0 \Longrightarrow x = 11/2$ como $f''(x) = -2$ es $f''(11/2) = -2 < 0 \Longrightarrow (11/2, 57/4) = (5,5; 14,25)$ es un máximo relativo y también absoluto. El consumo es máximo a las 11:30 con 14,25 y mínimo a las 6:00 y valdrá 6.
- ☛ Con estos datos dibujamos:



Problema 4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando $F(0) = 3$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (e^x + 2)\, dx = e^x + 2x + C$
$F(0) = 1 + C = 3 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow F(x) = e^x + 2x + 2$

b) La función tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

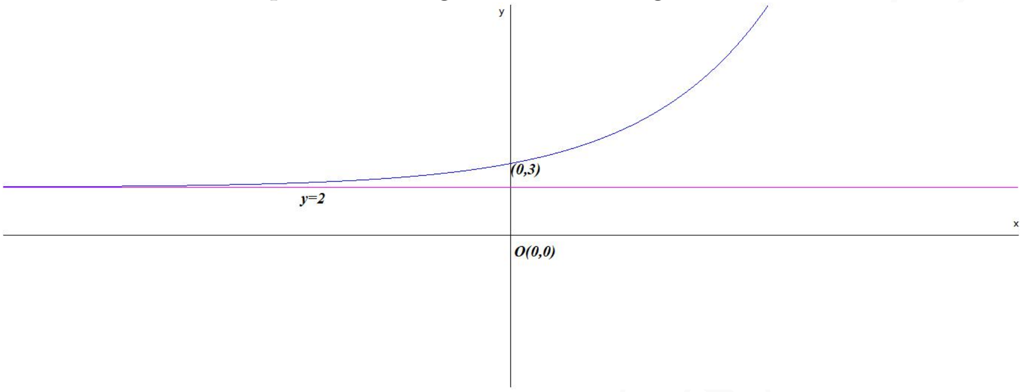
- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 3)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow e^x + 2 = 0$ no tiene solución$\Longrightarrow f$ No corta al eje de abscisas.

$f'(x) = e^x > 0 \Longrightarrow$ No tiene extremos y es siempre creciente.
$f''(x) = e^x > 0 \Longrightarrow \smile$ la función es cóncava en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.
Asíntotas:

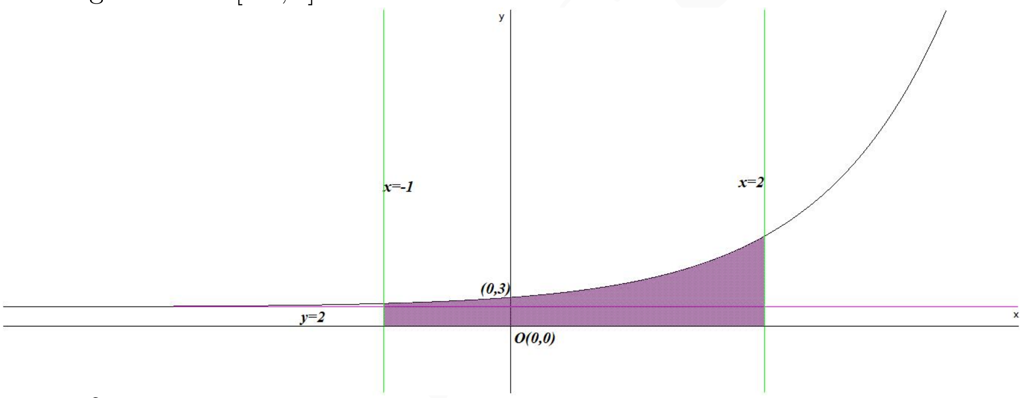
- Verticales: no hay
- Horizontales: $y = 2$ cuando $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (e^x + 2) = 2, \quad \lim_{x \to \infty} (e^x + 2) = +\infty$$

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



La función es positiva y está por encima del eje de abscisas. Sólo habría un recinto de integración $S : [-1, 2]$



$$S = \int_{-1}^{2} (e^x + 2)\, dx = e^x + 2x]_{-1}^{2} = (e^2 + 4) - (e^{-1} - 2) = \frac{e^3 + 6e - 1}{e} \simeq 13{,}0212\ u^2$$