Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2024

Problema 1 (10 puntos) Sea $P(t) = 1000\left(15 + \dfrac{t}{100 + t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2000. Se pide:

a) (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b) (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c) (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15040 individuos?

Solución:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} 1000\left(15 + \dfrac{t}{100 + t^2}\right) = 15000$ habitantes.

b) $P'(t) = \dfrac{1000(100 - t^2)}{(t^2 + 100)^2} = 0 \Longrightarrow t = \pm 10$, la solución negativa no es relevante.

	$(0, 10)$	$(10, \infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La población crece en el intervalo de tiempo $(0, 10)$ y decrece en el intervalo de tiempo $(10, \infty)$.
En $(10, 15050)$ hay un máximo relativo, que también sería absoluto. El año 2010 habría una población máxima de 15050 habitantes.

c) $P(t) = 1000\left(15 + \dfrac{t}{100 + t^2}\right) = 15040 \Longrightarrow t = 5$ y $t = 20$.
Los años 2005 y 2020 habría una población de 15040 habitantes.

Problema 2 (10 puntos) Sean las funciones $g(x) = a\left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

a) (3 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

b) (4 puntos) Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \le 1 \\ h(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 3$.

c) (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1-2x)^3\,dx$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{2x-1} = 3$

b) Las ramas de las funciones son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} a\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)^3 = \dfrac{a}{8} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3 \\ g(1) = \dfrac{a}{8} \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{a}{8} = 3 \Longrightarrow a = 24$$

c) $F(x) = \displaystyle\int (1-2x)^3\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 1-2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right] = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int t^3\,dt = -\dfrac{t^4}{8} = -\dfrac{(1-2x)^4}{8}$

$$\int_0^2 (1-2x)^3\,dx = F(2) - F(0) = -\frac{81}{8} + \frac{1}{8} = -10$$

Problema 3 (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a) (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b) (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

Solución:

a) $B(x) = I(x) - C(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10000) = -x^2 + 320x - 10000$
$B'(x) = -2x + 320 = 0 \Longrightarrow x = 160$
$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(160) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 160$ es un máximo relativo, en nuestro caso también es absoluto.
El máximo beneficio de obtiene con la producción de 160 unidades y asciende a $B(160) = 15600$€.

b) $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{x^2+80x+10000}{x} \Longrightarrow CM'(x) = \dfrac{x^2-10000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 100$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0,100)$	$(100,\infty)$
$CM'(x)$	$-$	$+$
$CM(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,100)$ y creciente en el $(100,\infty)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(100,280)$, en nuestro caso también es absoluto. El coste mínimo por unidad se obtiene con la producción de 100 unidades y es de $CM(100) = 280$€.

Problema 4 (10 puntos) Dada $f(x) = \dfrac{mx^3-1}{x^2}$

a) (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x=-1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b) (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{mx^3+2}{x^3} = 0 \Longrightarrow f'(-1) = m-2 = 0 \Longrightarrow m = 2$

$f'(x) = \dfrac{2x^3+2}{x^3} \Longrightarrow f''(x) = -\dfrac{6}{x^4} \Longrightarrow f''(-1) = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

b) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{mx^3-1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(mx - x^{-2}\right)\,dx = \left.\frac{mx^2}{2} + \frac{1}{x}\right]_1^2 = 2m + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} - 1 = \frac{3m}{2} - \frac{1}{2} = 4 \Longrightarrow m = 3$