Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Enero 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

a) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

b) (0,5 puntos) Represente gráficamente la función f.

c) (1 punto) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) ☛ Punto de corte con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$
Puntos de corte con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow (0,0)$, $(1,0)$ y $(2,0)$

☛ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1,58$ y $x = 0,42$

	$(-\infty; 0,42)$	$(0,42; 1,58)$	$(1,58; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

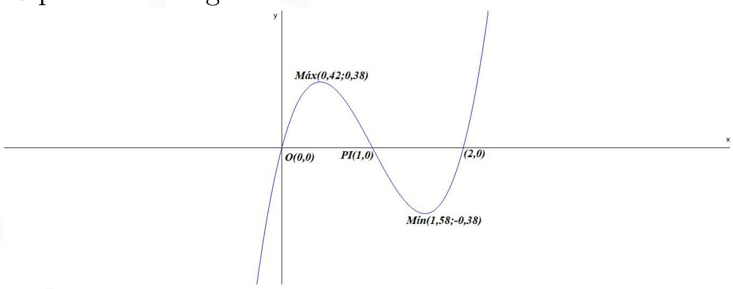
La función es creciente en el intervalo $(-\infty; 0,42) \cup (1,58; \infty)$
La función es decreciente en el intervalo $(0,42; 1,58)$.
Tiene un máximo relativo en $(0,42; 0,38)$.
Tiene un mínimo relativo en $(1,58; -0,38)$.

☛ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 1)$
La función es cóncava $\smile$ en el $(1, \infty)$.
La función tiene un punto de inflexión en $(1,0)$

b) Representación gráfica:



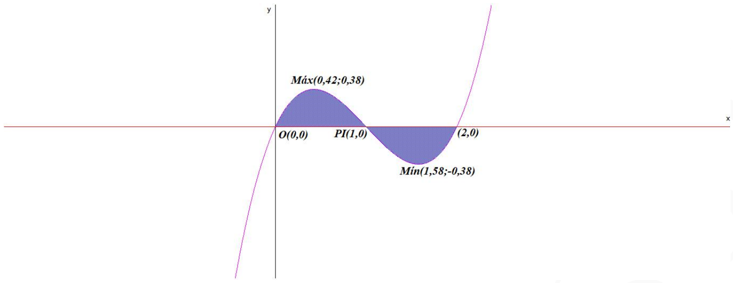
c) Tenemos dos áreas $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{2} = 0,5\ u^2$$



Problema 2 (2,5 puntos) Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función $\nu(t)$ nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $\nu(t)$ se conoce que su variación instantánea es

$$\nu'(t) = t^2 - 5t + 6, \quad t \in [0, 6]$$

a) (0,75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función ν.

b) (0,75 puntos) Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $\nu(0) = 10$, halle la función v.

c) (0,5 puntos) Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) (0,5 puntos) ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

Solución:

a) $\nu'(t) = t^2 - 5t + 6 = 0 \Longrightarrow t = 2$ y $t = 3$

	$(0,2)$	$(2,3)$	$(3,6)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2) \cup (3,6)$
La función es decreciente en el intervalo $(2,3)$.
Tiene un máximo relativo en $x = 2$.
Tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

b) $\nu(t) = \int (t^2 - 5t + 6)\, dt = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + C$, como $\nu(0) = 10 \Longrightarrow C = 10$, luego

$$\nu(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 10$$

c) $3000\nu(2) = 3000 \cdot \frac{44}{3} = 44000$€
$3000\nu(4) = 3000 \cdot \frac{46}{3} = 46000$€
Hay una ganancia de $46000 - 44000 = 2000$€

d) Hemos calculado los máximos y mínimos relativos, hay que analizar si son absolutos. $\nu(0) = 10$, $\nu(6) = 28$, $\nu(2) = \frac{44}{3}$ y $\nu(3) = \frac{29}{2}$. El máximo absoluto se encuentra en $t = 6$, $\nu(6) = 28$€ es el mayor valor que ha tenido cada acción en este periodo. El mínimo absoluto es en $t = 0$ con $\nu(0) = 10$€. Luego el inversor debía comprar en $t = 0$ y vender en $t = 6$ con un beneficio por acción de 18€.

Problema 3 (2,5 puntos) El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = (x-1)^2$ y $g(x) = 5 - 2x$ donde x está expresado en metros.

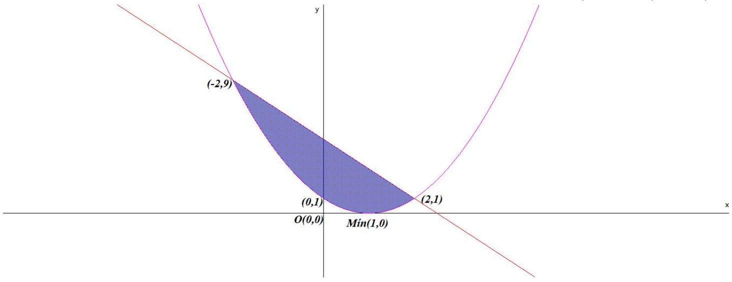
a) (1 punto) Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) (1,5 puntos) Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

Solución:

a) $f(x) = (x-1)^2 \Longrightarrow f'(x) = 2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$
$f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1,0)$ es un mínimo relativo. La función corta al eje de ordenadas en $(0,1)$.
$g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 = 5 - 2x \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

Los puntos de corte entre las dos curvas son $(-2, 9)$ y $(2, 1)$.



b) $S = \int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\, dx = -\dfrac{x^3}{3} + 4x\Big]_{-2}^{2} = \dfrac{32}{3}$ m^2

Si A es el área del plástico comprado $A - \dfrac{A}{3} = \dfrac{32}{3} \Longrightarrow A = 16$ m^2 lo que supone un coste de $16 \cdot 15€ = 240€$

Problema 4 (2,5 puntos) Sea la función $f(t) = \dfrac{12t - 24}{t + 3}$, $\; t \geq 0$

a) (1,5 puntos) Represente gráficamente la función f, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de f.

b) Si la función f representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde t indica los años de vida de la empresa

b1) (0,5 puntos) ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) (0,5 puntos) A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

Solución:

a) $f(t) = \dfrac{12t - 24}{t + 3} \Longrightarrow f'(t) = \dfrac{60}{(t + 3)^2} \Longrightarrow f''(t) = -\dfrac{120}{(t + 3)^3}$

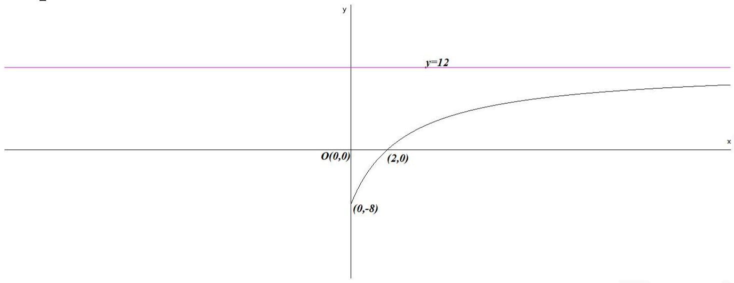
- ☛ $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
- ☛ Puntos de Corte:
  - Con OY hacemos $t = 0 \Longrightarrow f(0) = -8 \Longrightarrow (0, -8)$
  - Con OX hacemos $f(t) = 0 \Longrightarrow \dfrac{12t - 24}{t + 3}) = 0 \Longrightarrow t = 2 \Longrightarrow (2, 0)$
- ☛ Monotonía: $f'(t) > 0$, la función no tiene extremos relativos y es creciente en todo el dominio de la función.
- ☛ Curvatura: $f''(t) < 0 \Longrightarrow f$ no tiene puntos de inflexión y es convexa $(\frown)$ en todo el dominio de la función.
- ☛ Asíntotas:

- Verticales: No tiene, $t=-3$ no pertenece al dominio de la función.
- Horizontales: $y=12$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{12t-24}{t+3}=12$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

☛ Representación:



b) b1) Como puede verse en la gráfica la empresa deja de tener pérdidas a partir del segundo año. (Punto de corte con el eje de abscisas y la función es siempre creciente)

b2) Los beneficios están limitados a medida que pasan los años por 12 millones de euros. (Hay una asíntota horizontal en $y=12$)