Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Dado el sistema con el parámetro a: $\left\{\begin{array}{r} x+z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y+az=0 \end{array}\right.$

a) (1,25 puntos) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.

b) (1,25 puntos) Resolver el sistema para $a=-1$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$ y $|A|=1-a=0 \Longrightarrow a=1$

- Si $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- Si $a=1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

b) Si $a=-1$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{l} y=1 \\ 1-2z=-1 \Longrightarrow z=1 \\ x+1=1 \Longrightarrow x=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2,5 puntos) La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (1,25 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (1,25 puntos)

Solución:

a) Sean x unidades vendidas del disco I, y unidades vendidas del disco II y z unidades vendidas del disco III.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70000 \\ z=x+y \\ z-y=3(y-x) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=70000 \\ x+y-z=0 \\ 3x-4y+z=0 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70000 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 70000 \\ 0 & 0 & -2 & -70000 \\ 0 & -7 & -2 & -210000 \end{array}\right) \Longrightarrow$

Sistema compatible determinado. Solución única:

$$\left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{-70000}{-2}=35000 \\ -7y-70000=-210000 \Longrightarrow y=20000 \\ x+20000+35000=70000 \Longrightarrow x=15000 \end{array}\right.$$

Se venden 15000 discos I, 20000 discos II y 35000 discos III.

Problema 3 (2,5 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X\cdot A-A^t=B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Solución:

$X\cdot A-A^t=B \Longrightarrow XA=B+A^t \Longrightarrow X=(B+A^t)A^{-1}=$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2,5 puntos) Sean las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) (1 punto) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2=-I$.

b) (1 punto) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43}.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow 1-2x=-1 \Longrightarrow x=1.$

b) Si $x = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = -I, \quad A^3 = A^2 A = -IA = -A,$$

$$A^4 = A^3 A = -AA = -A^2 = I, \quad A^5 = A^4 A = IA = A, \ldots$$

$$A^{43} = A^{40} A^3 = (A^4)^{10} A^3 = I^{10}(-A) = -A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$