Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Noviembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.
Solución:
Sean x € entrada al teatro, y € entrada al partido y z € entrada al concierto.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,9x+0,9y+0,9z=117\\ z=2x\\ z=y+20\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=130\\ 2x-z=0\\ y-z=-20\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30€\\ y=40€\\ z=60€\end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&130\\ 2&0&-1&0\\ 0&1&-1&-20\end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&130\\ 0&-2&-3&-260\\ 0&1&-1&-20\end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ 2F_3+F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&1&130\\ 0&-2&-3&-260\\ 0&0&-5&-300\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado (solución única)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5z=-300\Longrightarrow z=60\\ -2y-180=-260\Longrightarrow y=40\\ x+40+60=130\Longrightarrow x=30\end{array}\right.$$

La entrada al teatro cuesta 30€, al partido cuesta 40€ y al concierto cuesta 60€

Problema 2 (2,5 puntos) Dadas las matrices
$A=\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&2&-2\\ -1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3&-2&1\\ -1&4&2\\ 0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la matriz A^2 y su inversa.

b) (1,25 puntos) Resuelve la ecuación matricial $2A^2X=4B$.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 & -5/8 \\ 5/8 & -3/16 & 1/8 \\ 3/8 & -5/16 & -1/8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

b) $2A^2X = 4B \Longrightarrow X = 2(A^2)^{-1}B = 2 \cdot \dfrac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\dfrac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Problema 3 (2,5 puntos) Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 9X - 3Y = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -39 & 3 \\ -42 & -12 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow 11X = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -33 & 0 \\ -44 & -11 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Tenemos $Y = 3X - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 4 (2,5 puntos) Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A. (1 punto)

b) Para $x = 1$, calcular la matriz X tal que $X \cdot A = I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

Solución:

a) $|A| = -4x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

b) Si $x = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$X \cdot A = I + A \Longrightarrow X = (I + A)A^{-1} = A^{-1} + I \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$