Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Noviembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}$,$C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Si $\dfrac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) (1,5 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es única? Resuelve el sistema para $m = -2$.

Solución:

a) $\dfrac{1}{2} \cdot A^2 \cdot B \cdot C = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+my \\ mx+y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+my \\ mx+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+my = 1 \\ mx+y = 1 \end{cases}$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 1 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$

- ☛ Si $m \in R - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $m = -1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema incompatible (el sistema no tiene solución)
- ☛ Si $m = 1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)

c) Si $m = -2$:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

a) (1,25 puntos) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.

b) (1,25 puntos) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el número de operarios, y el número de supervisores y z el número de gerentes.

$$\begin{cases} x+y+z=244 \\ x=8z \\ x=4(0,5y+0,4z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=244 \\ x-8z=0 \\ 5x-10y-8z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=160 \\ y=64 \\ z=20 \end{cases}$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \\ 5 & -10 & -8 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & -15 & -13 & -1220 \end{array}\right) =$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-15F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & 0 & 122 & 2440 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{2440}{122}=20 \text{ gerentes} \\ y=244-9z=64 \text{ supervisores} \\ x=244-y-z=160 \text{ operarios} \end{cases}$$

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0,5 puntos)

b) Resuelve la ecuación matricial $M\cdot P\cdot X = N^T - M$ (1,5 puntos)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

Solución:

a) $MN=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

$NM=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

Luego $MN=NM=I$

b) $MPX=N^T-M \Longrightarrow X=(MP)^{-1}(N^T-M)=$

$\left[\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

c) $X+(N+I)^2=O \Longrightarrow X=O-(N+I)^2=-(N+I)^2=$

$-\left[\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix} -10 & 36 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$

Problema 4 (2,5 puntos) Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. (1 puntos)

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ (1,5 puntos)

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & x-2 \\ x-2 & x^2+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow 2-x = x-2 \Longrightarrow x = 2$

b) $AX = B^tX - C \Longrightarrow AX - B^tX = -C \Longrightarrow (A - B^t)X = -C \Longrightarrow$
$X = -(A - B^t)^{-1}C =$
$-\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} =$
$-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$