Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (1,25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b) (1,25 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

a) $\underset{m\times n}{X} \cdot \underset{3\times 3}{B} + \underset{2\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{C} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 3 \Longrightarrow \dim(X) = 2 \times 3$

$XB + A = C \Longrightarrow X = (C - A)B^{-1}$, como $|B| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -3y + z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos)En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierto día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200€. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4€ y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

a) (1,25 puntos) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

b) (1,25 puntos) Resuélvalo.

Solución:

a) Sean x sacos de 25 kg a 4€ = 100€,
y sacos de 50 kg a 4€ = 200€ y
z sacos de 100 kg a 4€ = 400€.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=180 \\ 100x+200y+400z=29200 \\ x=2(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=180 \\ x+2y+4z=292 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right.$$

b) $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 2 & 4 & 292 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & -2 & 0 & -68 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=180-y-z=120 \text{ sacos} \\ y=\dfrac{-68}{-2}=34 \text{ sacos} \\ z=\dfrac{112-y}{3}=26 \text{ sacos} \end{array}\right.$$

sistema compatible determinado. Solución única.

Problema 3 (2,5 puntos) Se consideran las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{array}\right),\ B=\left(\begin{array}{rr} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right),\ C=\left(\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{array}\right)$$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A\cdot B=C$.

b) Para $a=2$ y $b=4$, resolver la ecuación matricial $X=AB+3C$

Solución:

a) $$A\cdot B=\left(\begin{array}{rrr} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} 4a+2 & 2a+2b \\ a+3 & 3a-b+52 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rr} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4a+2=-2 \\ 2a+2b=2 \\ a+3=2 \\ 3a-b+52=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=2 \end{array}\right.$$

b) Si $a = 2$ y $b = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = AB + 3C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0,75 puntos)

b) Calcula $\dfrac{1}{3}B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0,75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0,5 puntos)

Solución:

a) $A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\dfrac{1}{3}B^2 - I = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\underset{3\times 3}{A} - \underset{3\times 3}{B} = \underset{3\times 3}{A - B}$ se puede realizar esta resta pero no es posible restar $\underset{1\times 3}{C}$ por tener distinta dimensión.
$\underset{3\times 3}{B} \cdot \underset{1\times 3}{C}$ no se puede hacer ya que el número de columnas de B es distinto del número de filas de C.