Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2023

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 5 & 9 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ m+1 & m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.

b) Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ m+1 & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad m = 2$$

Si $m = -\frac{1}{2}$ o $m = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq -\frac{1}{2}$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ y } A^{1000} = \begin{pmatrix} -1 & 1000 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -a+b \\ 2c & -c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a - c = 2a \Longrightarrow c = 0 \\ 2b - d = -a + b \Longrightarrow a = d - b \\ c = 2c \Longrightarrow c = 0 \\ d = -c + d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.