Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Diciembre 2023

Problema 1 (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine A^3 y A^{2023}.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{2023} = (A^3)^{674}A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = A^2$ ya que $A \cdot A^2 = A^3 = I \Longrightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (4 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^3 - 7a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -3, \; a = 1, \; a = 2$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 + F_1 \\ 3F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 7 & -7 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3 + 7F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/6 \end{array}\right.$$

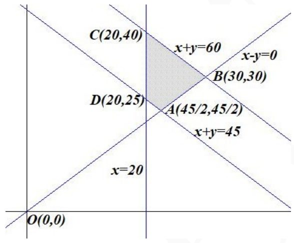
Problema 3 (4 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Solución:

Sean x tiempo de entrenamiento de fuerza e y tiempo de entrenamiento cardiovascular.

a) La región factible:

$$S: \begin{cases} 45 \leq x+y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y \leq 60 \\ x+y \geq 45 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Los vértices a estudiar serán: $A\left(\dfrac{45}{2}, \dfrac{45}{2}\right)$, $B(30,30)$, $C(20,40)$ y $D(20,25)$.

b) $f(x,y) = x + 2y$ en S:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{45}{2}, \dfrac{45}{2}\right) = \dfrac{135}{2} = 67,5 \\ f(30,30) = 90 \\ f(20,40) = 100 \\ f(20,25) = 70 \end{cases} \Longrightarrow$$

El entrenamiento más beneficioso sería con 20 minutos de fuerza y 40 de cardiovascular, con una duración de 100 totales.

El entrenamiento menos beneficioso sería con 22,5 minutos de fuerza y 22,5 de cardiovascular, con una duración de 67,5 totales.

Solución por solver