Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Diciembre 2023

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A^2 - A$.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

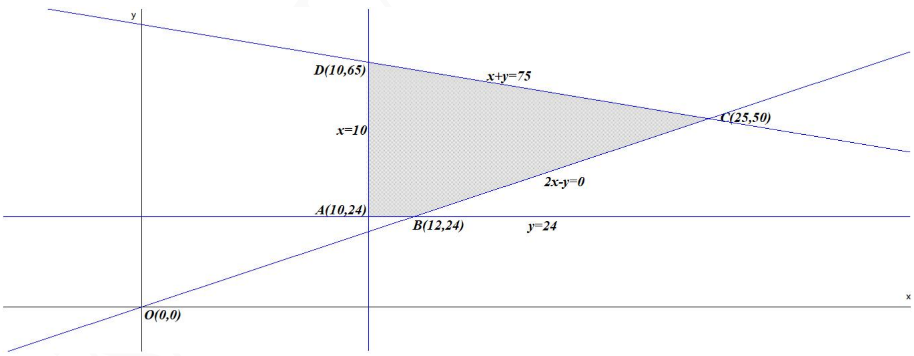
Problema 2 *(4 puntos)* En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución:

Sean x litros de aceite de girasol e y litros de aceite de oliva.

Región factible:

$$\begin{cases} x + y \leq 75 \\ y \geq 2x \\ x \geq 10 \\ y \geq 24 \end{cases}$$



Los vértices son $A(10, 24)$, $B(12, 24)$, $C(25, 50)$ y $D(10, 65)$

La función objetivo es $f(x,y) = x + 3y$

$$\begin{cases} f(10,24) = 82 \\ f(12,24) = 84 \\ f(25,50) = 175 \\ f(10,65) = 205 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 205€ vendiendo 10 l de girasol y 65 l de oliva.

Problema 3 *(4 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$

- ☛ Si $a \in R - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \dfrac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$