# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
**Febrero 2024**

---

**Problema 1** (2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto $(2, -1, 0)$. Es decir, de aquellas que tienen vector director $(v_1, v_2, v_3)$ , donde $v_1$, $v_2$, $v_3$ son parámetros.

b) (1 punto) De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director $(-1, 4, 1)$.

**Solución:**

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (v_1, v_2, v_3) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = 2 + v_1\lambda \\ y = -1 + v_2\lambda \\ z = v_3\lambda \end{cases}$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 4, 1) \\ P_r(2, -1, 0) \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

**Problema 2** (2,5 puntos) Considere el par de rectas

$$r : \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

.

a) (1 punto) Calcule la posición relativa de las dos rectas.

b) (0,5 puntos) De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

c) (1 punto) De la ecuación de un plano ortogonal a la recta $r$.

**Solución:**

$$r : \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5 + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 3, 0) \\ P_r(0, -5, 0) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} + 3\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 0) \\ P_s(0, -1/2, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (0, 9/2, 0) = \dfrac{9}{2}(0, 1, 0)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r$ y $s$ no se cruzan y están en el mismo plano.

Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}$ =rango$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow r$ y $s$ o son paralelas o coincidentes.

Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix}$ =rango$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y $s$ son paralelas.

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s} = (0, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 3, 0) \\ P_r(0, -5, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+5 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -z = 0 \Longrightarrow \pi : z = 0$

c) Planos perpendiculares a una recta dada hay infinitos, voy a calcular el que contiene al origen de coordenadas.

$\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1, 3, 0) \Longrightarrow \pi' : x + 3y + \lambda = 0 \overset{O(0,0,0)}{\Longrightarrow} \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : x + 3y = 0$

**Problema 3** (2,5 puntos) Calcular la ecuación del plano $\pi$ que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$.

**Solución:**

$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\sigma} = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1) \\ P(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - y + z = 0$

$$x + y - z = 0$$

**Problema 4** (2,5 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-1}{1}$, se pide:

a) (1,25 punto) Comprobar que $r$ es paralela a $\pi$.

b) (1,25 punto) Hallar el plano $\sigma$, distinto de $\pi$ y paralelo a $\pi$, cuya distancia a $r$ coincide con la de $\pi$.

**Solución:**

a) $r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (-2, 2, 1) \cdot (1, 2, -2) = -2 + 4 - 2 = 0$

Hay que comprobar si $P_r(0, 4, 1)$ pertenece al plano $\pi \Longrightarrow 0 + 8 - 2 \neq 0 \Longrightarrow P_r \notin \pi \Longrightarrow r \parallel \pi$.

b) $\sigma \parallel \pi \Longrightarrow \sigma : x + 2y - 2z + \lambda = 0$

Tomamos un punto de $r \Longrightarrow P_r(0, 4, 1)$ y tenemos que $d(P_r, \pi) = d(P_r, \sigma)$:

$$\frac{|0 + 8 - 2 + 0|}{\sqrt{9}} = 2 = \frac{|0 + 8 - 2 + \lambda|}{\sqrt{9}} \Longrightarrow |6 + \lambda| = 6 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + \lambda = 6 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi = \sigma \\ 6 + \lambda = -6 \Longrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow \sigma : x + 2y - 2z - 12 = 0 \end{array} \right.$$