Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Si los vectores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,5 puntos) Comprueba si los vectores $\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{t} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

b) (1 punto) Calcula razonadamente $3\overrightarrow{s} \times \left(\overrightarrow{t} - \overrightarrow{r}\right)$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

Solución:

a) Tenemos que $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ forman una base por ser linealmente independientes. $[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente dependientes. Uno de los vectores se podría poner como combinación lineal de los otros dos.

b) $3\overrightarrow{s} = 3\overrightarrow{u} + 9\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{t} - \overrightarrow{r} = \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{w}$
$$3\overrightarrow{s} \times \left(\overrightarrow{t} - \overrightarrow{r}\right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u} & \overrightarrow{v} & \overrightarrow{w} \\ 3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \dfrac{y-2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$.

a) (1 punto) Indica la posición relativa de r y s.

b) (0,75 puntos) Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

c) (0,75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ P_r = A(1, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(2, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,2,-1)$

$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan ($\not\parallel$).

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(2,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi :$ $x - z - 2 = 0$

c) $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |(2,0,-2)| = 2\sqrt{2}$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-4|}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ u$$

Problema 3 (2,5 puntos) Dados los planos $\pi \equiv x+y+z=3$, $\pi' \equiv x+y=3$ y el punto $A=(2,1,6)$

a) (0,75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

b) (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

c) (0,75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+y=3 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(0,3,0) \end{array} \right.$

b) Sea $P(a,b,c) \Longrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (a-2, b-1, c-6) = k(1,1,1) \Longrightarrow \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-2=k \\ b-1=k \\ c-6=k \end{array} \right. \Longrightarrow$ $P(k+2, k+1, k+6)$ como $P \in \pi \Longrightarrow (k+2)+(k+1)+(k+6) = 3 \Longrightarrow k = -2 \Longrightarrow P(0,-1,4)$

c) Seguimos el siguiente método:

- ☛ calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:
  $t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1) \\ P_t = A(2,1,6) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 6+\lambda \end{array} \right.$

- Calculamos el punto A'' de corte de r con π:
  $(2+\lambda)+(1+\lambda)+(6+\lambda)=3 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow A''(0,-1,4)$

- $\dfrac{A+A'}{2}=A'' \Longrightarrow A'=2A''-A=(0,-2,8)-(2,1,6)=(-2,-3,2)$

Problema 4 (2,5 puntos) Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A=(0,0,1)$, $B=(4,1,2)$ y $C=(3,4,3)$.

Solución:

- Sea r la recta que une A y B: $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(4,1,2)-(0,0,1)=(4,1,1)\\ P_r=A(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=4\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

- Sea s la recta que une A y C: $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AC}=(3,4,3)-(0,0,1)=(3,4,2)\\ P_s=A(0,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=3\mu\\ y=4\mu\\ z=1+2\mu\end{array}\right. \quad \forall\mu\in\mathbb{R}$$

- Sea t la recta que une B y C: $t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{BC}=(3,4,3)-(4,1,2)=(-1,3,1)\\ P_t=B(4,1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$t:\left\{\begin{array}{l}x=4-\theta\\ y=1+3\theta\\ z=2+\theta\end{array}\right. \quad \forall\theta\in\mathbb{R}$$