Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2024

Problema 1 (2,5 puntos) El plano $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

Solución:

Tenemos $\pi : 2x + by - 2z + 4 = 0$

- Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(-2, 0, 0)$
- Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, -4/b, 0)$
- Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 2)$
- $\overrightarrow{AB} = (2, -4/b, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$.

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -4/b & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{8}{b}, -4, \frac{8}{b}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-\frac{4}{b}(2, b, -2)\right| =$$

$$\frac{2}{b}\sqrt{b^2 + 8} = 6 \Longrightarrow \sqrt{b^2 + 8} = 3b \Longleftarrow b^2 + 8 = 9b^2 \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1$$

Problema 2 (2,5 puntos) Si los vectores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,25 punto) Comprueba si los vectores $\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{s} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{t} = -3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

b) (1,25 punto) Si ademas, los vectores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{s} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{t}$ donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

Solución:

a) Como $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ forman una base por ser linealmente independientes.

Tenemos $[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$

$\{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}\}$ son linealmente independientes.

b) Tenemos $\overrightarrow{u}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}\overrightarrow{w} = 1$ por ser vectores unitarios y $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 0$ por ser perpendiculares
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u}\cdot(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}) = 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 2$
$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{s} = \overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 1$
$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{t} = \overrightarrow{w}\cdot(-3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = -3\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w} = 1$
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{r}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{s}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{t} = 2+1+1 = 4$

Problema 3 (2,5 puntos) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv ax + 2y + (a-3)z = 4$,

a) (1,25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

b) (1,25 puntos) Para $a = 1$, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow a(2+\lambda)+2(-1-\lambda)+(a-3) = 4 \Longrightarrow 2a+a\lambda-2-2\lambda+a = 7 \Longrightarrow (a-2)\lambda = 9-3a \Longrightarrow \lambda = \dfrac{9-3a}{a-2} \Longrightarrow r \parallel \pi$ si $a = 2$.
Luego $\pi : 2x+2y-z-4 = 0$
$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(2,-1,1) \end{cases}$ y $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|4-2-1-4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|-3|}{3} = 1\ u$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{9-3a}{a-2} = -6 \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto y $\pi : x+2y-2z-4 = 0$.

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,-2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(2,-1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2x+2y+3z-5 = 0$$

$$\pi' : 2x+2y+3z-5 = 0$$

Problema 4 (2,5 puntos) Dados los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (-1,4,-4)$,

a) (1,5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

b) (0,5 puntos) Calcula la distancia de A a π.

c) (0,5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B.

Solución:

a) Sea $P(x,y,z)$ tenemos:
$d(A,P) = d(B,P) \Longrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$
$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2+(z+4)^2} \Longrightarrow$
$\pi : x-2y+2z+8 = 0$

b) $d(A,\pi)=\dfrac{|1+0+0+8|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{9}{3}=3\ u$

c) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(-2,4,-4)=-2(1,-2,2)\\ P_r=A(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}$