Examen de Matemáticas II (Ordinaria-Coincidente 2024) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

A. 1 (2,5 puntos) Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cúbicas de 1 m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2 m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8 m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54 m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

Solución:
Sean x el lado largo de la base, y el lado ancho de la base y z el lado alto.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+2=y+z \\ x=8+y-z \\ 2x+2y=54 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x-y-z=-2 \\ x-y+z=8 \\ x+y=27 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \text{ m} \\ y=15 \text{ m} \\ z=11 \text{ m} \end{array}\right.$$

El número de cajas es $12\cdot 15\cdot 11 = 1980$ cajas.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -2 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & -1 & -56 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -2 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -55 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5z=-55 \Longrightarrow z=11 \\ -2y+11=-19 \Longrightarrow y=15 \\ x+15+0=27 \Longrightarrow x=12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=15 \\ z=11 \end{array}\right.$$

A. 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 7/3)$.

c) (0,5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$
Asíntotas:

- ☛ Verticales:
  - En $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

- En $x=1$ No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable (un agujero)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\stackrel{L'H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}=-\infty;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}=+\infty$$

☛ Oblícuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-1}{x^3-x}=1$$

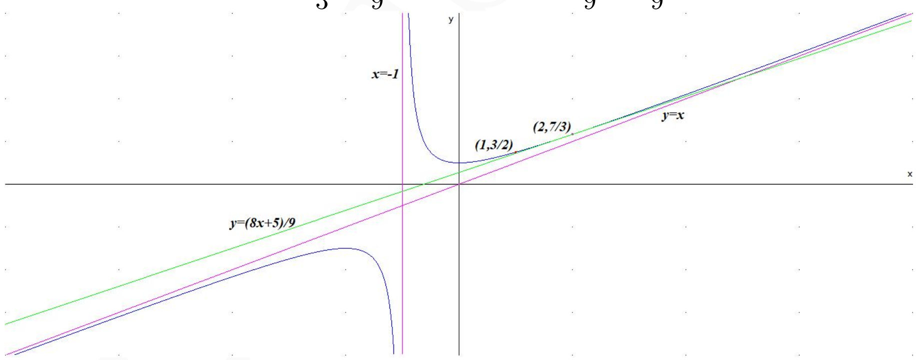
$$n=\lim_{x\to +\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1+x}{x^2-1}=0$$

$$y=x$$

b) $b=f(a)=f(2)=\dfrac{7}{3}$

$f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}\Longrightarrow m=f'(2)=\dfrac{8}{9}$

$y-b=m(x-a)\Longrightarrow y-\dfrac{7}{3}=\dfrac{8}{9}(x-2)\Longrightarrow y=\dfrac{8}{9}x+\dfrac{5}{9}$



c) $f'(x_0)=\dfrac{x_0(x_0+2)}{(x_0+1)^2}=1\Longrightarrow x_0(x_0+2)=(x_0+1)^2\Longrightarrow x_0^2+2x_0=x_0^2+2x_0+1\Longrightarrow$

$!0=1!\Longrightarrow$ No existe el punto buscado.

A. 3 (2,5 puntos) Dados el punto $P(-1,2,6)$, el plano $\pi: 3x-2y+z-5=0$ y la recta $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{-1}$:.

a) (1,5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π.

b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi}=(3,-2,1),\ s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,1,-1)\\ P_s(-1,2,0)\end{cases}\Longrightarrow s:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}$

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos un plano paralelo a π que contenga a P:

$$\pi' : 3x - 2y + z + a = 0 \xrightarrow{P\in\pi'} -3 - 4 + 6 + a = 0 \Longrightarrow a = 1 \Longrightarrow \pi' : 3x - 2y + z + 1 = 0$$

☛ Calculamos el punto de corte P' de s con π':

$$3(-1 + 2\lambda) - 2(2 + \lambda) + (-\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow P'(3, 4, -2)$$

☛ La recta r que buscamos pasa por los puntos P y P':

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PP'} = (4, 2, -8) = 2(2, 1, -4) \\ P(-1, 2, 6) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 6 - 4\lambda \end{cases}$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

☛ Calculamos una recta t perpendicular a π que contiene a P:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (3, -2, 1) \\ P(-1, 2, 6) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos el punto de corte Q de t con π:

$$3(-1 + 3\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + (6 + \lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{7} \Longrightarrow Q\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right)$$

☛ El punto Q es el punto medio entre P y el que buscamos H:

$$\frac{H + P}{2} = Q \Longrightarrow H = 2Q - P = 2\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right) - (-1, 2, 6) = \left(\frac{11}{7}, \frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)$$

A. 4 (2,5 puntos) Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6,7 y de desviación típica 1,25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7,5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7,5, que el servicio es excelente.

a) (0,75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?

b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?

c) (0,75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

Solución:

$$N(6,7; 1,25)$$

a) $P(X \geq 7,5) = P\left(Z \geq \dfrac{7,5-6,7}{1,25}\right) = 1 - P(Z \leq 0,64) = 1 - 0,7389 = 0,2611$

b) $P(5 \leq X \leq 7,5) = P\left(\dfrac{5-6,7}{1,25} \leq Z \leq \dfrac{7,5-6,7}{1,25}\right) = P(-1,36 \leq Z \leq 0,64) =$
$P(Z \leq 0,64) - P(Z \leq -1,36) = P(Z \leq 0,64) - (1 - P(Z \leq 1,36)) =$
$0,7389 - (1 - 0,9131) = 0,652$

c) $P(X \leq 5) = P\left(Z \leq \dfrac{5-6,7}{1,25}\right) = P(Z \leq -1,36) = 1 - P(Z \leq 1,36) = 1 - 0,9131 = 0,0869$

$$B(25; 0,0869)$$

$p = 0,0869$, $n = 25 > 10$, $np = 2,1725 < 5$, luego no es aconsejable una aproximación por la normal.

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\binom{25}{0} 0,0869^0 \cdot 0,9131^{25} + \binom{25}{1} 0,0869^1 \cdot 0,9131^{24}\right) = 0,6518$$

Nota infomativa: Cuando la probabilidad es tan baja la distribución adecuada sería la de Poisson.

Opción B

B. 1 (2,5 puntos) Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X-3Y = A$ y $3X+6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1}.

b) (1 punto) Calcular A^{127}.

Solución:

a) $\begin{cases} 5X - 3Y = A \\ 3X + 6Y = B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{1}{13}(2A + B) \\ Y = \dfrac{1}{39}(5B - 3A) \end{cases}$

$X = \dfrac{1}{13}(2A+B) = \dfrac{1}{13}\left[2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$Y = \dfrac{1}{39}(5B-3A) = \dfrac{1}{39}\left[5\begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$

$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$, $A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$, $A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I$ y $A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$. Luego:

$$A^{127} = (A^4)^{31} \cdot A^3 = I \cdot (-A) = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B. 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \dfrac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

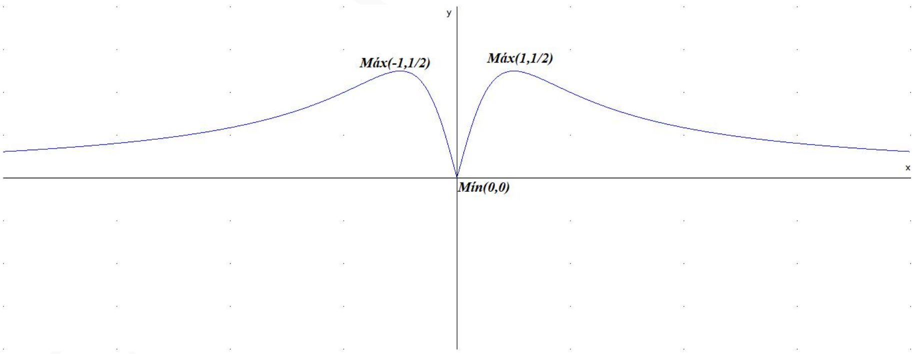
a) Monotonía:

- ☛ Se trata de una función continua en $\mathbb{R}$ (los denominadores no se anulan nunca y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$
- ☛ Derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y decreciente en el $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, tiene dos máximos relativos en $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.



b) Calculamos los puntos de corte de la recta con $f(x)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Hay dos recintos de integración:

☛ Para $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ es $[-1, 0]$

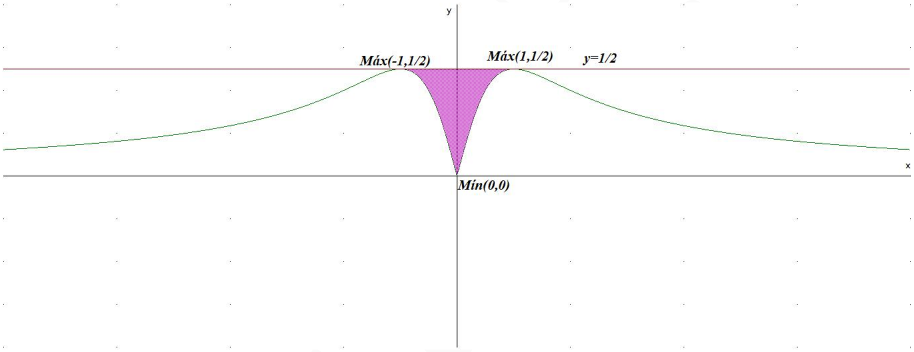
☛ Para $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es $[0, 1]$

Luego hay dos áreas:

☛ $S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{2}\Big]_{-1}^{0} = \frac{1-\ln 2}{2}$

☛ $S_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2}\Big]_{0}^{1} = \frac{1-\ln 2}{2}$

☛ $S = |S_1| + |S_2| = \dfrac{1-\ln 2}{2} + \dfrac{1-\ln 2}{2} = 1 - \ln 2 = 0,3069\ u^2$



B. 3 (2,5 puntos) En el punto $A(1, 0, -1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3, 1, 0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano $\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.

b) (0,75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

Solución:

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 2 + 2\beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{v} = (0, 2, -2) = 2(0, 1, -1) \\ A(2, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + y + z - 4 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1)$$

a) $$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 0, -1) = (2, 1, 1) \\ A(1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi' : y - z - 1 = 0$$

b) Sea r la recta que define el rayo $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (2,1,1) \\ P_r = A(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$.

Calculamos el punto P de corte de r con π:
$(1+2\lambda)+\lambda+(-1+\lambda)-4=0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P(3,1,0)$
$d(A,P) = |\overrightarrow{AP}| = |(3,1,0)-(1,0,-1)| = |(2,1,1)| = \sqrt{6}\ u.$

c) La distacia es mínima cuando el rayo incide verticalmente:
$\cos(\widehat{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\pi}}) = \dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|} = \dfrac{|(2,1,1)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta = 19^\circ 28' 16''$

B. 4 (2,5 puntos) En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50 % son cuentos infantiles, el 30 %, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

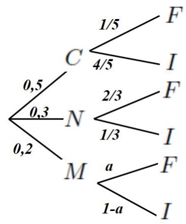
a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Solución:
Sean C cuentos infantiles, N novelas históricas, M manuales técnicos, F en francés e I en inglés.

$$P(C)=0,5;\ \ P(N)=0,3;\ \ P(M)=0,2;\ \ P(F|C)=\frac{1}{5};\ \ P(I|N)=\frac{1}{3};\ \ P(M|F)=\frac{1}{7}$$

a) $P(F|\overline{M}) = \dfrac{P(F\cap\overline{M})}{P(\overline{M})} = \dfrac{P(F\cap C)+P(F\cap N)}{P(C)+P(N)} =$
$\dfrac{P(F|C)P(C)+P(F|N)P(N)}{P(C)+P(N)} = \dfrac{\frac{1}{5}\cdot 0,5+\frac{2}{3}\cdot 0,3}{0,5+0,3} = \dfrac{3}{8} = 0,375$



b) $P(F) = P(F|C)P(C)+P(F|N)P(N)+P(F|M)P(M) =$
$\dfrac{1}{5}\cdot 0,5+\dfrac{2}{3}\cdot 0,3+a\cdot 0,2 = 0,3+0,2a$
$P(M|F) = \dfrac{P(F|M)P(M)}{P(F)} = \dfrac{a\cdot 0,2}{0,3+0,2a} = \dfrac{1}{7} \Longrightarrow a = \dfrac{1}{4} = 0,25$
$P(F) = 0,3+0,2\cdot 0,25 = 0,35$

$P(N|I) = \dfrac{P(I|N)P(N)}{P(I)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0,3}{1-0,35} = 0,154$