Examen de Matemáticas II (Selectividad - Ordinaria 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

A. 1 *(2,5 puntos)* Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:
Sean x longitud del listón largo, y longitud del listón intermedio y z longitud del listón corto.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+4y=3y+15z \\ x-17=y+z \\ 9z+7=y+x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y-15z=0 \\ x-y-z=17 \\ x+y-9z=7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=107 \text{ cm} \\ y=71 \text{ cm} \\ z=19 \text{ cm} \end{array}\right.$$

El listón largo mide 107 cm, el intermedio 71 cm y el corto 19 cm Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -38 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2z=-38 \Longrightarrow z=19 \\ 2y-152=-10 \Longrightarrow y=71 \\ x-71-19=17 \Longrightarrow x=107 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=107 \\ y=71 \\ z=19 \end{array}\right.$$

A. 2 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=\pi$.

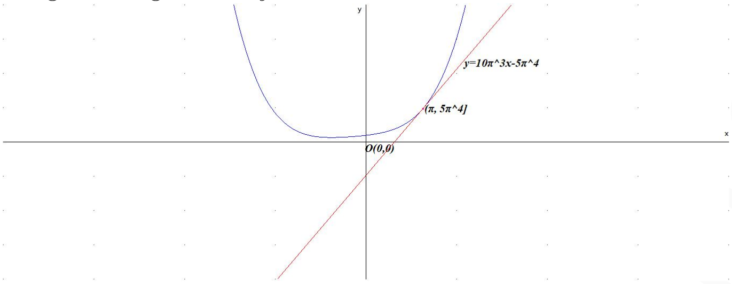
b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi,0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) (1 punto) Si $g(x)=f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución:

a) Tenemos $a=\pi \Longrightarrow b=f(a)=f(\pi)=5\pi^4$.
$f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2x+\pi^3 \Longrightarrow m=f'(\pi)=10\pi^3$
La ecuación punto pendiente de la recta tangente en el punto $(a,b)=(\pi,5\pi^4)$ con pendiente

$m = 10\pi^3 \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi)$
Luego la tangente es: $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$



b) La función es continua y derivable, para que cumpla las codiciones del teorema de Rolle hay que comprobar si $f(-\pi) = f(0)$:

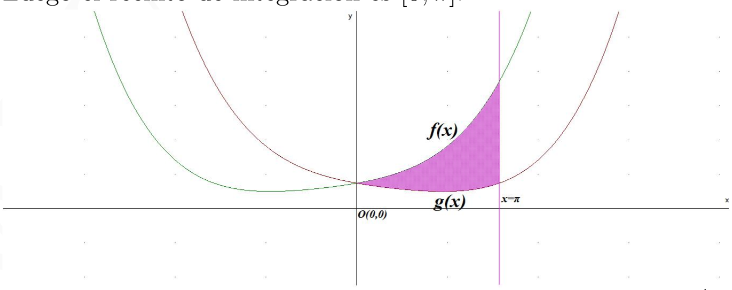
- $f(-\pi) = \pi^4$
- $f(0) = \pi^4$
- Luego $f(-\pi) = f(0)$

La función cumple las condiciones del teorema de Rolle que nos asegura que $\exists x \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(x) = 0$.
Para llegar a este resultado por el teorema de Bolzano analizamos $f'(x)$ que es una función continua, y tenemos:

- $f'(-\pi) = -2\pi^3$
- $f'(0) = \pi^3$
- Luego la función cambia de signo en los extremos del intervalo

La función derivada cumple las condiciones del teorema de Bolzano que nos asegura que $\exists x \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(x) = 0$.

c) $g(x) = f(-x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$ y calculamos los puntos de corte entre las dos funciones:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4 \Longrightarrow 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \Longrightarrow x = 0$
Luego el recinto de integración es $[0, \pi]$.



Sea $F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)\, dx = \dfrac{\pi x^4}{2} + \pi^3 x^2 + C$.

$$S = \left| \int_0^{\pi} (f(x) - g(x))\, dx \right| = |F(\pi) - F(0)| = \frac{3\pi^5}{2}\ u^2$$

A. 3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) (1,5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución:

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \\ A(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + y = 0$

$$\pi : x - y = 0$$

b) $r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (a,b,c) \\ P_{r_1}(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r_1 : \begin{cases} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = 1 + c\lambda \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (a,b,c) \\ P_{r_2}(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + a\mu \\ y = 1 + b\mu \\ z = c\mu \end{cases}$

$\overrightarrow{u_{r_1}} = \overrightarrow{u_{r_2}} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow (a,b,c)\cdot(1,0,1) = a + c = 0 \Longrightarrow c = -a \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r_1}} = \overrightarrow{u_{r_2}} = (a,b,-a)$

$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u_{r_2}}\right| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(-b+a, 0, a-b)| = \sqrt{2(a-b)^2}$

$d(r_1, r_2) = d(A, r_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u_{r_2}}\right|}{|\overrightarrow{u_{r_2}}|} = \dfrac{\sqrt{2(a-b)^2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1 \Longrightarrow 2(a-b)^2 = 2a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 - 4ab = b(b - 4a) = 0 \Longrightarrow b = 0$ y $b = 4a$

- ☛ Si $b = 0$:

$$\overrightarrow{u_{r_1}} = \overrightarrow{u_{r_2}} = (a,0,-a) = a(1,0,-1)$$

$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,0,-1) \\ P_{r_1}(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1,0,-1) \\ P_{r_2}(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = -\mu \end{cases}$

- ☛ Si $b = 4a$:

$$\overrightarrow{u_{r_1}} = \overrightarrow{u_{r_2}} = (a,4a,-a) = a(1,4,-1)$$

$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,4,-1) \\ P_{r_1}(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r_1 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y

$r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1,4,-1) \\ P_{r_2}(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow r_2 : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = -\mu \end{cases}$

A. 4 *(2,5 puntos)* Sabiendo que: $P(\overline{A}) = \dfrac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \dfrac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{3}{10}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \dfrac{14}{25}$

Solución:

Tenemos $P(A) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{20} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{20}$

$P(A|B) - P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/20}{P(B)} - \frac{3/20}{9/20} = \frac{1}{24} \Longrightarrow P(B) = \frac{2}{5}$

b) A y C independientes: $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{9P(C)}{20}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \Longrightarrow \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9P(C)}{20} \Longrightarrow P(C) = \frac{1}{5}$.

Opción B

B. 1 *(2,5 puntos)* Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Solución:

a) $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$BCB^{-1} = A \Longrightarrow b \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{b} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

La igualdad se cumple $\forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $|AA^t| = |A||A^t| = |A||A| = |A|^2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}^2 = 12^2 = 144$

c) Si $b = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 5 \\ -y - 5 = -7 \Longrightarrow y = 2 \\ x + 4 + 5 = 3 \Longrightarrow x = -6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -6 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{array} \right.$$

B. 2 *(2,5 puntos)* Calcule:

a) (1,25 puntos) $\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x\,dx$

b) (1,25 punto) Halle $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

Solución:

a) $F(x)=\displaystyle\int (x+2)\ln x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln x\Longrightarrow du=\frac{1}{x}\,dx\\ dv=(x+2)dx\Longrightarrow v=\frac{x^2+4x}{2}\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=\frac{(x^2+4x)\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+4x}{x}\,dx=$
$\displaystyle\frac{(x^2+4x)\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int(x+4)\,dx=\frac{(x^2+4x)\ln x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)+C=\frac{2(x^2+4x)\ln x-x^2-8x}{4}+C$
$\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x\,dx=F(e)-F(1)=\frac{e^2}{4}-\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{e^2+9}{4}\simeq 4,097264024$

b) Sea $\displaystyle\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\Longrightarrow \ln\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left[\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)=$
$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\cos x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}}{-\sin x}=\frac{\frac{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{-\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\frac{1}{1}}{1}}{-1}=-1\Longrightarrow \ln\lambda=-1\Longrightarrow$
$\lambda=e^{-1}$

B. 3 *(2,5 puntos)* Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1,5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V=1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución:
Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,-1)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,1)$ y $\overrightarrow{P_1P_4}=(2,a-1,2)$

a) $V=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|=\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\2&a-1&2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{6}|9-a|=1\Longrightarrow |9-a|=6\Longrightarrow$

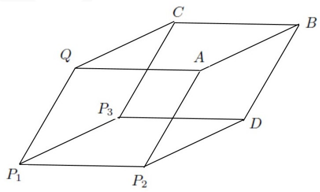
$\left\{\begin{array}{l}9-a=6\Longrightarrow a=3\\ 9-a=-6\Longrightarrow a=15\end{array}\right.$

- ☛ si $a=3$ tenemos:
  $|\overrightarrow{P_1P_2}|=|(1,0,-1)|=\sqrt{2}<10$, $|\overrightarrow{P_1P_3}|=|(0,2,1)|=\sqrt{5}<10$, $|\overrightarrow{P_1P_4}|=|(2,2,2)|=2\sqrt{3}<10\Longrightarrow$ solución válida.

- si $a = 15$ tenemos:
  $|\overrightarrow{P_1P_2}| = |(1,0,-1)| = \sqrt{2} < 10$, $|\overrightarrow{P_1P_3}| = |(0,2,1)| = \sqrt{5} < 10$, $|\overrightarrow{P_1P_4}| = |(2,14,2)| = 2\sqrt{56} > 10 \Longrightarrow$ solución no válida.

b) Tenemos los puntos $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$, $P_3(1,3,2)$ y $Q(3,3,3)$
Tenemos los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$ y $\overrightarrow{P_1Q} = (2,2,2)$
Luego:

- $D = P_2 + \overrightarrow{P_2D} = P_2 + \overrightarrow{P_1P_3} = (2,1,0) + (0,2,1) = (2,3,1)$
- $A = Q + \overrightarrow{QA} = Q + \overrightarrow{P_1P_2} = (3,3,3) + (1,0,-1) = (4,3,2)$
- $B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{P_1P_3} = (4,3,2) + (0,2,1) = (4,5,3)$
- $C = Q + \overrightarrow{QC} = Q + \overrightarrow{P_1P_3} = (3,3,3) + (0,2,1) = (3,5,4)$



B. 4 *(2,5 puntos)* Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución:
Construimos el espacio muestral en una tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14
3	4	5	6	7	8	9
4	6	8	10	12	14	16
5	6	7	8	9	10	11
6	8	10	12	14	16	18

a) $P(10) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ y $P(\text{Impar}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(\text{Par azul}|8) = \dfrac{3}{5}$

$P(\text{Impar rojo}|\text{Par}) = \dfrac{18}{27} = \dfrac{2}{3}$