Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

A. 1 *(2,5 puntos)* La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenían la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

Solución:
Sean x el número de intérpretes de la orquesta, y el número de intérpretes de cada coro y z el número de intérpretes del coro infantil.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2y+z}{10}+15=x \\ y=140+z+x \\ x-21=\dfrac{x+2y+z+8}{12} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x-2y-z=150 \\ x-y+z=-140 \\ 11x-2y-z=260 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=110 \text{ intérpretes} \\ y=400 \text{ intérpretes} \\ z=150 \text{ intérpretes} \end{array}\right.$$

La orquesta tiene 110 intérpretes, cada coro 400 y el coro infantil 150. El total de intérpretes es: $x+2y+z+8=110+800+150+8=1068$ intérpretes.

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -140 \\ 10 & -2 & -1 & 150 \\ 11 & -2 & -1 & 260 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-10F_1 \\ F_3-11F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -140 \\ 0 & 8 & -11 & 1550 \\ 0 & 9 & -12 & 1800 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3-9F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & -140 \\ 0 & 8 & -11 & 1550 \\ 0 & 0 & 3 & 450 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3z=450 \Longrightarrow z=150 \\ 8y-1650=1550 \Longrightarrow y=400 \\ x-400+150=-140 \Longrightarrow x=110 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=110 \\ y=400 \\ z=150 \end{array}\right.$$

A. 2 *(2,5 puntos)* Sea la función $f(x)=x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

a) (0,75 punto) Halle $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

b) (1,75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y=x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{(x-1)^{2/3}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x^2-1)^{2/3}}{(x-1)^{2/3}} =$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\left[(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}\right]}{(x-1)^{2/3}} = \lim\limits_{x\to 1} \left(x(x+1)^{2/3}\right) = \sqrt[3]{4}$

b) Calculamos los puntos de corte entre $f(x)$ e $y = x$:
$f(x) = x \Longrightarrow x\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = x \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{2}$. Como es en el primer cuadrante el intervalo de integración será $[0, \sqrt{2}]$.

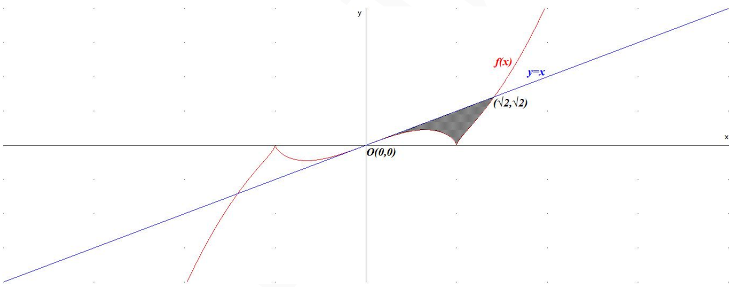
$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x(x^2-1)^{2/3} - x)\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2 - 1 = t \\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right] =$$

$$-\frac{x^2}{2} + \int (xt^{2/3}) \cdot \frac{dt}{2x} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int t^{2/3}\,dt = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{5/3}}{5/3} = -\frac{x^2}{2} + \frac{3(x^2-1)^{5/3}}{10} + C$$

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{2}} (f(x) - g(x))\,dx = F(\sqrt{2}) - F(0) = -\frac{7}{10} + \frac{3}{10} = -\frac{2}{5}$$

El resultado es negativo por estar la función $y = x$ por encima de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, \sqrt{2}]$.

$S = |S_1| = \dfrac{2}{5} = 0,4\ u^2$



A. 3 *(2,5 puntos)* Sea la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi : z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,0,0) \\ P_r(0,0,0) \end{array}\right. \text{ y } \pi : z = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (0,0,1)$$

a) $s \perp \overrightarrow{u_\pi}$ y $s \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0,1,0) \\ P_s(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

b) $t \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (a,b,c)\cdot(0,0,1) = c = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = (a,b,0)$.

$$\cos\widehat{(t,r)} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\overrightarrow{u_t}\cdot\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_t}|\cdot|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{|(a,b,0)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Longrightarrow a^2+b^2 = 2a^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} b = a \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = (a,a,0) = a(1,1,0) \Longrightarrow t_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \\ b = -a \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = (a,-a,0) = a(1,-1,0) \Longrightarrow t_2: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

A. 4 *(2,5 puntos)* La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del 80 %. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al 90 %. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el 80 %. Se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.

c) (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

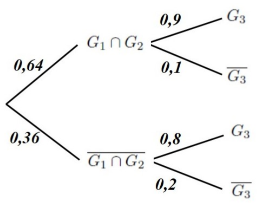
Solución:

a) Sea G el suceso ganar el partido con $P(G) = 0,8$ y $P(\overline{G}) = 0,2$.
$P(\overline{G}\cap\overline{G}\cap\overline{G}) = 0,2^3 = 0,008$

b) Sean los sucesos G_1 gana el primer partido, G_2 gana el segundo partido y G_3 gana el tercer partido.

Tenemos $P(G_1\cap G_2) = 0,8^2 = 0,64$, $P(G_3|G_1\cap G_2) = 0,9$ y $P(G_3|\overline{G_1\cap G_2}) = 0,8$

$P(G_3) = P(G_3|G_1\cap G_2)P(G_1\cap G_2) + P(G_3|\overline{G_1\cap G_2})P(\overline{G_1\cap G_2}) = 0,9\cdot 0,64 + 0,8\cdot 0,36 = 0,864$



c) $P(\overline{G_1\cap G_2}|G_3) = \dfrac{P(G_3|\overline{G_1\cap G_2})}{P(G_3)} = \dfrac{0,8\cdot 0,36}{0,864} = \dfrac{1}{3} = 0,3333$

Opción B

B. 1 *(2,5 puntos)* Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.

b) (0,75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m.

c) (1 punto) Para $m = 1$, discutir el sistema $(A^tA)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, según los valores de a.

Solución:

a) $BA = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2+1 & 3m+1 \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$

$$|BA| = 0 \Longrightarrow \nexists (BA)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}$$

b) $AB = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{pmatrix}$

$|AB| = m(m^2+3) = 0 \Longrightarrow m = 0$

- Si $m \neq 0 \Longrightarrow |AB| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(AB) = 2$
- Si $m = 0 \Longrightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(AB) = 1$

c) Si $m = 1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$

$\overline{A^tA} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & a^2 - a \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} =$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - a \end{array}\right)$

$a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1$

Si $a = 0$ o $a = 1 \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

B. 2 *(2,5 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = x - \dfrac{4}{(x-1)^2}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ y las asíntotas:

- ☛ Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = \left[1 - \frac{4}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = \left[1 - \frac{4}{0^+}\right] = -\infty$$

- ☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = -\infty; \quad \lim_{x\to \infty}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = \infty$$

- ☛ Oblicuas: $y = mx + n$

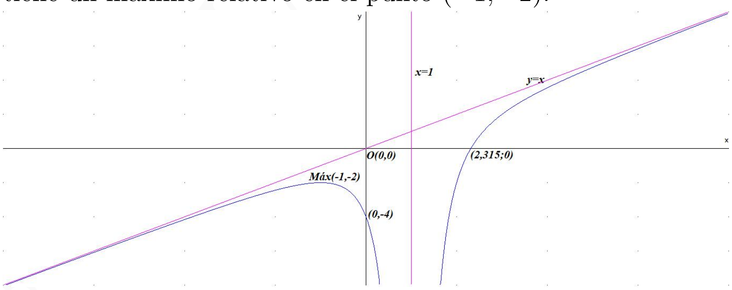
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1 - \frac{4}{x(x-1)^2}\right) = 1$$
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2} - x\right) = 0$$
$$y = x$$

.

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{8}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, y decreciente en el intervalo $(-1,1)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1,-2)$.

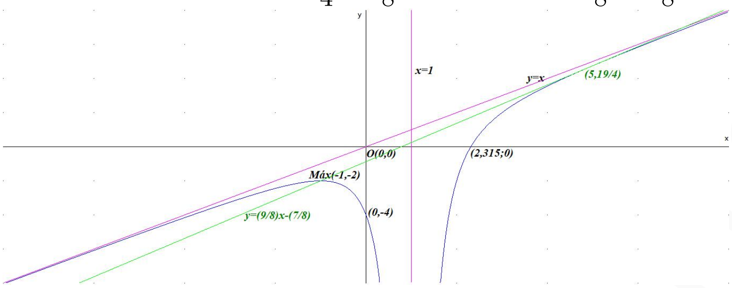


c) $9x - 8y = 6 \Longrightarrow y = \dfrac{9}{8}x - \dfrac{3}{4} \Longrightarrow m = f'(a) = \dfrac{9}{8}$

$f'(a) = 1 + \dfrac{8}{(a-1)^3} = \dfrac{9}{8} \Longrightarrow a = 5$

$b = f(a) = f(5) = \dfrac{19}{4}$

$$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - \frac{19}{4} = \frac{9}{8}(x-5) \Longrightarrow y = \frac{9}{8}x - \frac{7}{8}$$



B. 3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,-1)$, $D(1,1,2)$, se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.

b) (0,75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B, C y D y el ángulo $\widehat{B}$ del mismo.

c) (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A, B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1)$
$\overrightarrow{AC} = (1,0,-1) - (0,0,1) = (1,0,-2)$
$\overrightarrow{AD} = (1,1,2) - (0,0,1) = (1,1,1)$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow$$

A, B, C y D no son coplanarios.

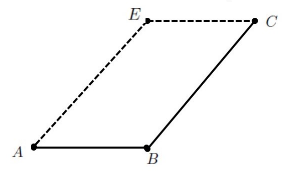
$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{|-2|}{6} = \frac{1}{3}\ u^3$$

b) $\overrightarrow{BC} = (1,0,-1) - (1,1,0) = (0,-1,-1)$
$\overrightarrow{BD} = (1,1,2) - (1,1,0) = (0,0,2)$
$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} | = \frac{1}{2}|(-2,0,0)| = 1\ u^2$
$\cos\widehat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|} = \dfrac{(0,-1,-1)\cdot(0,0,2)}{\sqrt{2}\cdot 2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \widehat{B} = 135^\circ$

c) Como se pide uno de los puntos E, considero el caso en el que los puntos A, B y C son consecutivos:

$$E = A + \overrightarrow{AE} = A + \overrightarrow{BC} = (0,0,1) + (0,-1,-1) = (0,-1,0)$$

$$S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\right| = |(-2,1,-1)| = \sqrt{6}\ u^2$$



B. 4 *(2,5 puntos)* En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 de probabilidad 0,5 y A_2 de probabilidad 0,3 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. De cierto suceso B de probabilidad 0,4 se sabe que es independiente de A_1 y que la probabilidad del suceso $A_3 \cap B$ es 0,1. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de A_3.

b) (1,5 puntos) Decidir si B y A_2 son independientes.

Solución:
Tenemos: $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_1 \cap A_2) = 0$, $P(B) = 0,4$,
$P(B \cap A_1) = P(B)P(A_1) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$ y $P(A_3 \cap B) = 0,1$.

a) $P(A_3) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)] = 1 - (0,5 + 0,3 - 0) = 0,2$

b) $P(B) \cdot P(A_2) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
Como A_1, A_2 y A_3 son disjuntos:
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \Longrightarrow$
$0,4 = 0,2 + P(B \cap A_2) + 0,1 \Longrightarrow P(B \cap A_2) = 0,1$
Como $P(B \cap A_2) \neq P(B) \cdot P(A_2) \Longrightarrow B$ y A_2 no son independientes.