Examen de Matemáticas II (Selectividad - Extraordinaria-coincidente 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

A. 1 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a, $\begin{cases} 2x - y + az = -a \\ x + 2y + 3z = -2 \\ ax + ay + 2z = -8 \end{cases}$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & a & -a \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ a & a & 2 & -8 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -a^2 - 9a + 10 \Longrightarrow a = -10, \ \ a = 1$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-10, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & -15 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -66 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible. (No tiene solución)}$$
- Si $a = -10$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -10 & -10 & 2 & -8 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 + 5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & -14 \\ 0 & -15 & -48 & 42 \end{array}\right) =$$
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & 5 & 16 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$
(Infinitas soluciones)

b) Si $a = -10$:
$$\begin{cases} 2x - y - 10z = 10 \\ 5y + 16z = -14 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{18}{5} + \dfrac{17}{5}\lambda \\ y = -\dfrac{14}{5} - \dfrac{16}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

A. 2 *(2,5 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} xe^x & \text{si} \quad x<1 \\ e+\dfrac{x\ln x}{x^2+1} & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

y se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x=1$.

b) (0,75 puntos) Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) (0,75 puntos) Calcular: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

a) Continuidad en $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} xe^x=e \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(e+\dfrac{x\ln x}{x^2+1}\right)=e \\ f(1)=e\end{cases} \Longrightarrow$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=e\Longrightarrow f$ es continua en $x=1$.

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\begin{cases} (x+1)e^x & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{(\ln x+1)(x^2+1)-2x^2\ln x}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-)=2e \\ f'(1^+)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Luego $f'(1^-)\ne f'(1^+)\Longrightarrow f$ no es derivable en $x=1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e+\dfrac{x\ln x}{x^2+1}\right)=e+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{L'H}{=}e+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+1}{2x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{L'H}{=}$
$e+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{2}=e$

c) $$F(x)=\int xe^x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx \\ dv=e^xdx\Longrightarrow v=e^x \\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x=(x-1)e^x$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)=0-(-1)=1$$

A. 3 *(2,5 puntos)* Los vértices de un triángulo son $A(-1,0,1)$, $B(0,1,0)$ y un punto C situado sobre la recta

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=-1\end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de C sabiendo que el área del triángulo es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2,1,-1)$ y es paralela a la recta dada r.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}2x-y=0\\x+z=-1\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=-1-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,-1)\\P_r(0,0,-1)\end{array}\right.$$

a) $C(\lambda,2\lambda,-1-\lambda)$ y tenemos: $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(\lambda+1,2\lambda,-2-\lambda)$

$$V=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\\lambda+1&2\lambda&-2-\lambda\\1&1&-1\end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2-\lambda,-1,1-\lambda)|=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(2-\lambda)^2+1+(1-\lambda)^2}=\frac{\sqrt{2(\lambda^2-3\lambda+3)}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0\Longrightarrow \lambda=1,\ \ \lambda=2$$

Si $\lambda=1\Longrightarrow C(1,2,-2)$ y si $\lambda=2\Longrightarrow C(2,4,-3)$

b) $t\parallel r$ y $P\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,-1)\\P_t=P(2,1,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\y=1+2\lambda\\z=-1-\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

A. 4 *(2,5 puntos)* En un espacio muestral se consideran tres sucesos A, B y C, tales que, $P(A\cup B\cup C)=1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A)=0,5$, $P(\overline{C})=0,3$, $P(B\cup C)=0,73$, $P(A\cap C)=0,21$ y $P(A\cap B\cap C)=0,06$. se pide:

a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B\cup C$ son independientes.

b) (1,5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C\cap(A\cup B))$.

Solución:

a) $P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))\Longrightarrow$
$1=0,5+0,73-P(A\cap(B\cup C))\Longrightarrow P(A\cap(B\cup C)=0,23$
$P(A)\cdot P(B\cup C)=0,5\cdot 0,73=0,365$
Luego $P(A\cap(B\cup C))\neq P(A)\cdot P(B\cup C)\Longrightarrow A$ y $B\cup C$ no son independientes.

b) $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)=0,7P(B)$
$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=P(B)+0,7-0,7P(B)=0,73\Longrightarrow$
$0,3P(B)=0,03\Longrightarrow P(B)=0,1$
Ahora tenemos $P(B\cap C)=0,1\cdot 0,7=0,07$
$P(C\cap(A\cup B))=P((C\cap A)\cup(C\cap B))=P(C\cap A)+P(C\cap B)-P(A\cap B\cap C)=$
$0,21+0,07-0,06=0,22$

Opción B

B. 1 *(2,5 puntos)* Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

Solución:

Sea x la cifra de las centenas, y la cifra de las decenas y z la de las unidades. El número según se lee es xyz que corresponde al $100x + 10y + z$.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ 100x+10y+z-2(100z+10y+x)=437 \\ y-1=\dfrac{x+z}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ 98x-10y-199z=437 \\ x-2y+z=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \\ z=1 \end{array}\right.$$

El número buscado es 751.

Solución del sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 98 & -10 & -199 & 437 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 98F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & -15 \\ 0 & -108 & -297 & -837 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3y=-15 \Longrightarrow y=5 \\ -540-297z=-837 \Longrightarrow z=1 \\ x+5+1=13 \Longrightarrow x=7 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=5 \\ z=1 \end{array}\right.$$

B. 2 *(2,5 puntos)*

a) (0,5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$.

b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.

c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

Solución:

a) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0)=0 \Longrightarrow d=0 \\ f(1)=0 \Longrightarrow a+b+c+d=0 \\ f(2)=0 \Longrightarrow 8a+4b+2c+d=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-3a \\ c=2a \\ d=0 \end{array}\right.$.

Si cogemos $a = 1 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0)=0 \Longrightarrow d=0 \\ f(1)=0 \Longrightarrow a+b+c+d=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=b-c \\ d=0 \end{array}\right.$.

Si cogemos $b = 2$ y $c = 1 \Longrightarrow a = 1 \Longrightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 + x$

b) Ahora tenemos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(0)=0 \Longrightarrow d=0 \\ f(1)=-1 \Longrightarrow a+b+c+d=-1 \\ f'(0)=0 \Longrightarrow c=0 \\ f'(1)=0 \Longrightarrow 3a+2b+c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2.$$

Hay que comprobar los extremos: $f'(x) = 6x^2 - 6x$ y $f''(x) = 12x - 6$.

$f''(0) = -6 < 0 \Longrightarrow (0, 0)$ es un máximo relativo y $f''(1) = 6 > 0 \Longrightarrow (1, -1)$ es un mínimo relativo.

La función es $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) Una función polinómica es siempre una función continua en $\mathbb{R}$ y además tenemos: $\lim\limits_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=a\cdot(-\infty)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=a\cdot(+\infty)$.
Por el teorema de Bolzano $\exists k\in\mathbb{R}$ tal que $f(k)=0$.
Luego una función polinómica de grado 3 siempre tendrá al menos un punto de corte con el eje de abscisas.

B. 3 *(2,5 puntos)* Sea la recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x+2y+z=2\\ x+y+2z=2\end{array}\right.$

a) (0,5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z=0$.

b) (1,25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta r. Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto $P(1,2,3)$ y que π_2 no corta al eje OZ.

c) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r y la recta s de ecuación $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=(3,-1,-1)\\ P_r(2,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2+3\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

a) $\pi: z=0\Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(0,0,1)$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|}=\frac{|(3,-1,-1)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}\Longrightarrow\alpha=72^\circ 27' 6''$$

b) Un haz de planos que contenga a la recta r sería:

$$x+2y+z-2+k(x+y+2z-2)=0\xrightarrow{P\in\pi_1}1+4+3-2+k(1+2+6-2)=0\Longrightarrow k=-\frac{6}{7}\Longrightarrow$$

$$\pi_1: x+2y+z-2-\frac{6}{7}(x+y+2z-2)=0\Longrightarrow\pi_1: x+8y-5z-2=0$$

$x+2y+z-2+k(x+y+2z-2)=0$ se tienen que anular las $z\Longrightarrow z=-2kz\Longrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$ y tenemos:
$x+2y+z-2-\dfrac{1}{2}(x+y+2z-2)=0\Longrightarrow\pi_2: x+3y-2=0$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\pi_1: x+8y-5z-2=0\\ \pi_2: x+3y-2=0\end{array}\right.$$

c) $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-2,3)\\ P_s(-2,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{P_sP_r}=(2,0,0)-(-2,1,1)=(4,-1,-1)$

$$[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-5\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

B. 4 *(2,5 puntos)* Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30 % son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable "número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé" Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.

b) (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75 % de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

Solución:

a) $B(10; 0,3)$, $\mu = np = 3$, $\sigma = \sqrt{npq} = 1,449$ y $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 = 0,2335$

b) $n = 200$, $p = 0,7$ y $q = 0,3 \Longrightarrow B(200; 0,7)$. Como $n > 30$, $np = 140 > 5$ y $nq = 60 > 5 \Longrightarrow B(200; 0,7) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(140; 6,481)$

$$P(X \geq (0,75 \cdot 200)) = P(X \geq 150) = P\left(Z \geq \frac{149,5 - 140}{6,481}\right) =$$

$$P(Z \geq 1,47) = 1 - P(Z \leq 1,47) = 1 - 0,9292 = 0,0708$$