Examen de Matemáticas II (Selectividad - Extraordinaria 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Opción A

A. 1 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Solución:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{1,2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = 2$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
Sistema incompatible. (No tiene solución)
- Si $\lambda = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
Sistema compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = 1$:
$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = \mu \end{array}\right. \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$
Si $x = 5 \Longrightarrow \mu = -5 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -5 \end{array}\right.$

A. 2 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.

c) (0,5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b \Longrightarrow m = f'(0) = b = 1$ y $f(0) = c = 0 \Longrightarrow f(x) = ax^2 + x,\ \forall a \in \mathbb{R}$ Si cogemos $a = 1 \Longrightarrow f(x) = x^2 + x$

b) Ahora $f(1) = 1 \Longrightarrow a + b + c = 1$ y $f'(1) = 2a + b = 0 \Longrightarrow b = -2a$ si cogemos $a = 1 \Longrightarrow 1 - 2 + c = 1 \Longrightarrow c = 2$ tenemos $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
Hay que comprobar si es un máximo $f'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 1$ es un mínimo, luego a tiene que ser negativa $a \in (-\infty, 0)$ por ejemplo $a = -1 \Longrightarrow -1 + 2 + c = 1 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Longrightarrow f'(x) = -2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow (1, 1)$ es un máximo relativo. La función sería $f(x) = -x^2 + 2x$.

c) No es posible, la derivada de una función polinómica de grado 2 es otra de grado 1 que al igualar a cero sólo tendría una solución y, por tanto, como mucho un extremo relativo.

A. 3 *(2,5 puntos)* Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) (1,5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución:

a) Se trata del plano mediador. Un punto de este plano $H(x, y, z)$ cumple: $d(P, H) = d(Q, H) \Longrightarrow |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{QH}| \Longrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2} \Longrightarrow$

$$\pi : 2x + 4y - 8z + 5 = 0$$

b) $r : x - 2 = y = z \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow R(2 + \lambda, \lambda, \lambda)$
$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |(1, 2, -4)|^2 = 21$
$|\overrightarrow{PR}|^2 = |(1 + \lambda, \lambda + 1, \lambda - 3)|^2 = 2(1 + \lambda)^2 + (\lambda - 3)^2$
$|\overrightarrow{QR}|^2 = |(\lambda, \lambda - 1, \lambda + 1)|^2 = \lambda^2 + (\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2$
$|\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2 + |\overrightarrow{QR}|^2 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 34 = 34 \Longrightarrow 2\lambda(3\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ y $\lambda = \dfrac{1}{3}$.
Como ninguna de las coordenadas de R puede ser nula tenemos como única solución válida:

$$R\left(2 + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

A. 4 *(2,5 puntos)* En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$.Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0,3$ y $P(C|A_3) = 0,6$. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0,25$.

b) (1,5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Solución:

a) Tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y además son incompatibles dos a dos. Por el teorema de la probabilidad total: $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$
Calculamos estas probabilidades:
$P(B \cap A_1) = P(A_1)P(B|A_1) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$
$P(B \cap A_2) = P(A_2)P(B|A_2) = P(A_1)P(B|A_1) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$
$P(B \cap A_3) = P(A_3)P(B|A_3) = P(A_3) \cdot 2P(B|A_1) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
Luego $P(B) = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$

b) Tenemos igualmente que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y además son incompatible dos a dos. Por el teorema de la probabilidad total: $P(C) = P(C \cap A_1) + P(C \cap A_2) + P(C \cap A_3)$
Calculamos estas probabilidades:
$P(C \cap A_1) = P(A_1)P(C) = 0,4P(C)$
$P(C \cap A_2) = P(A_2)P(C|A_2) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$
$P(C \cap A_3) = P(A_3)P(C|A_3) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$
Luego $P(C) = 0,4P(C) + 0,12 + 0,12 \Longrightarrow 0,6P(C) = 0,24 \Longrightarrow P(C) = 0,4$
$P(C \cap A_2) = 0,12$ y $P(C) \cdot P(A_2) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \Longrightarrow P(C \cap A_2) \neq P(C) \cdot P(A_2) \Longrightarrow C$ y A_2 no son independientes.

Opción B

B. 1 *(2,5 puntos)* Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

a) (0,75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces

$$\det((A + B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$.

c) (0,75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

a) $|(A+B)^2| = |A+B|^2 = (|A|+|B|)^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| = |A|^2 + |B|^2 + 2|AB|$

b) $|C+D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 4\alpha$, $|C| = 2\alpha+2$ y $|D| = 2$.
$|C+D| = |C| + |D| \Longrightarrow 4\alpha = 2\alpha + 2 + 2 \Longrightarrow \alpha = 2$

c) Si $\alpha = -1$: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C| = 0$ y como se trata de un sistema homogéneo es un sistema compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{array} \right. \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

B. 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1,75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x-3)$.

Solución:

a) $f(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \Longrightarrow f$ es IMPAR. Simétrica respecto al origen de coordenadas.
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

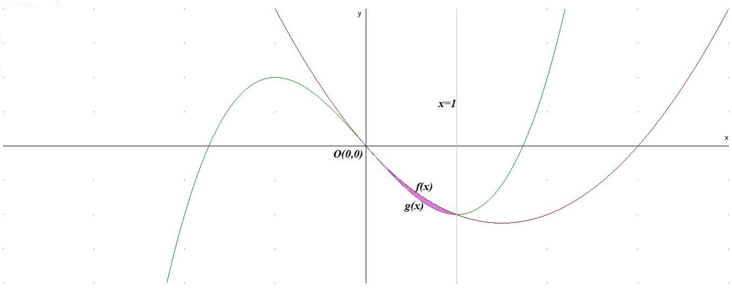
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 1)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un mínimo relativo en el $(1, -2)$

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 - 3x = x^2 - 3x \Longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$. El recinto de integración será $S_1 : [0, 1]$

$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 (x^3 - x^2)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12}\ u^2$$

La integral sale negativa por estar la función $g(x)$ por encima de la $f(x)$.



B. 3 *(2,5 puntos)* Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,-1,1) \\ P_r(2,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1) \\ P_s(0,-5,3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Tenemos $\overrightarrow{P_sP_r} = (2,4,-3)$

a) $\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |(0,4,4)| = 4\sqrt{2}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:
$\pi: 3x-y+z+a=0 \Longrightarrow 15+1+2+a=0 \Longrightarrow a=-18 \Longrightarrow \pi: 3x-y+z-18=0$
Calculamos el punto de corte Q de r con π:
$3(2+3\lambda)-(-1-\lambda)+\lambda-18=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow Q(5,-2,1)$
La recta buscada t pasa por P y Q:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PQ} = (5,-2,1)-(5,-1,2) = (0,-1,-1) \\ P_t(5,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1-\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

B. 4 *(2,5 puntos)* Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) (1,5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Solución:

a) Sean A las dianas de Antonio y B las de Benito.
No es necesario llegar al cuarto lanzamiento si solo uno de los lanzadores ha acertado tres dianas en los tres primeros lanzamientos mientras el otro los ha fallado:
$P(AAA\overline{BBB}) = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,70 \cdot 0,70 \cdot 0,70 = 0,005359375$
$P(\overline{AAA}BBB) = 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,30 \cdot 0,30 \cdot 0,30 = 0,011390625$
$P(AAA\overline{BBB}) + P(\overline{AAA}BBB) = 0,005359375 + 0,011390625 = 0,01675$

b) $B(60; 0,75) \Longrightarrow np = 60 \cdot 0,75 = 45 > 5$, $nq = 15 > 5 \Longrightarrow$

$$B(60; 0,75) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(45; 3,354)$$

$P\left(X \geq \dfrac{2 \cdot 60}{3}\right) = P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \dfrac{39,5 - 45}{3,354}\right) = P(Z \geq -1,64) =$
$P(Z \leq 1,64) = 0,9495$