Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN
Diciembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\, dt$. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{\sin(x^2)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x \sin(t^2)\, dt}{\sin(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\, dt + x\sin(x^2)}{2x\cos(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) + \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)} = \frac{0}{2} = 0$$

Problema 2 (2,5 puntos) Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\, dx + 2 = 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \\ dx = xdt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{x} xdt = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\, dx + 2 = 0 \Longrightarrow F(1) - F(a) = -2 \Longrightarrow 0 - \frac{(\ln a)^2}{2} = -2 \Longrightarrow \ln a = \pm 2 \Longrightarrow$$
$a = e^2$ (no válida) y $a = e^{-2}$

Problema 3 (2,5 puntos) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = \left[1^{+\infty}\right] = e^{\lambda}$$
$$\lambda = \lim_{x\to +\infty} \ln x \left[\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+1} - 1\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x\ln x}{x^2+3x+1} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{-\ln x - 1}{2x+3} =$$
$$\left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{-1/x}{2} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = \left[1^{+\infty}\right] = e^0 = 1$$

Problema 4 (2,5 puntos) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\sin x + 3x\cos 2x}{x^2}$$

Solución:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\sin x + 3x\cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cos x + 3\cos 2x - 6x\sin 2x}{2x} \overset{a=4}{=}$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 4\sin x - 6\sin 2x - 6\sin 2x - 12x\cos 2x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Luego $a = 4$ y $L = -\dfrac{1}{2}$