Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x}$.

a) (0,5 puntos) Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1 punto) Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

En $x = 0$ hay un salto infinito de la función y la función es discontinua. Como el numerador y el denominador son polinomios podemos concluir que la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

c) Monotonía:

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

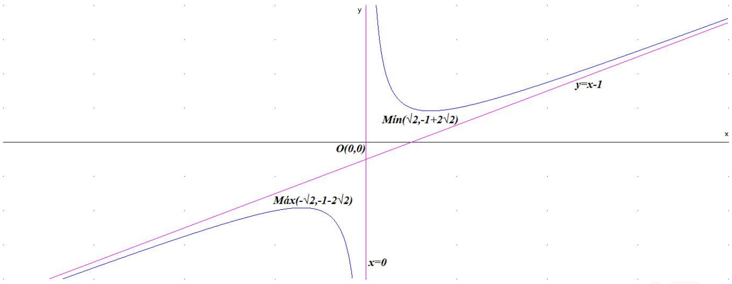
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.
Tiene un máximo relativo en $(-\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$

d) Asíntotas:

- ☛ Verticales: En $x = 0$ se analizó en el apartado a.
- ☛ Horizontales: No hay.
  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x} = +\infty$

- Oblicuas: $y = mx + n$
  $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$

  $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 2}{x} - x \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x + 2}{x} = -1 \Longrightarrow$
  $y = x - 1$.



Problema 2 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = x^3 + 1$

a) (0,5 puntos) Calcule una primitiva de $f(x)$.

b) (1 punto) Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.

c) (1 punto) Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

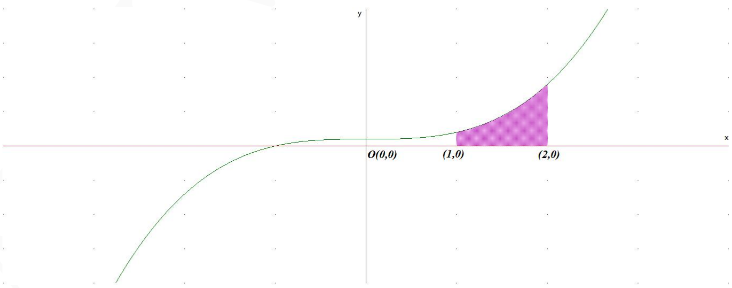
Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int f(x)\, dx = \int (x^3 + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} + x + C$

b) $f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(0) = 6 \neq 0 \Longrightarrow (0, 1)$ es un punto de inflexión.

c) $x^3 + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ luego la función no corta al eje OX en el intervalo $(1, 2)$. El recinto de integración es $S : [1, 2]$

$$S = \int_1^2 (x^3 + 1)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + x \right]_1^2 = \frac{19}{4} \simeq 4,75\ u^2$$



Problema 3 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

a) (0,5 puntos) Calcule el dominio de definición de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. En caso afirmativo, calcúlelos.

c) (0,5 puntos) Calcule los cortes de $f(x)$ con los ejes.

d) (0,75 puntos) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

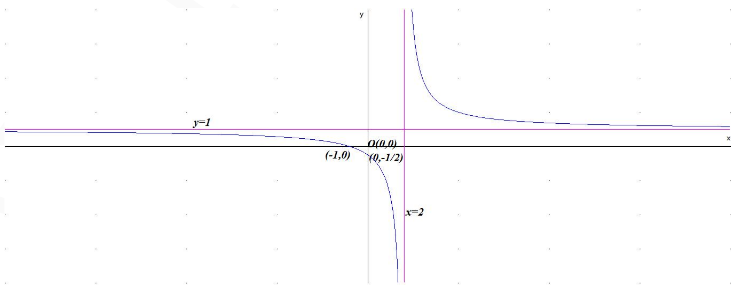
b) $f'(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2} \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ no tiene extremos relativos. Como $f'(x) < 0$ en el dominio de la función, será decreciente en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

c) El punto de corte con el eje de ordenadas, haciendo $x = 0 \Longrightarrow \left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$
El punto de corte con el eje de abscisa, haciendo $f(x) = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$

d) $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava ($\smile$) en el $(2, \infty)$



Problema 4 (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \sin x$

a) (0,75 puntos) Calcule una primitiva de $f(x)$.

b) (1,75 puntos) Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

b) Hacemos $f(x) = \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pi \Longrightarrow f(x)$ tiene un punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $(0, 2\pi)$ y habrá dos recintos de integración $S_1 : [0, \pi]$ y $S_2 : [\pi, 2\pi]$

$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = F(\pi) - F(0) = 2$$

Es positivo por estar la función por encima del eje OX.

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = F(2\pi) - F(\pi) = -2$$

Es negativo por estar la función por debajo del eje OX.

$$S = |S_1| + |S_2| = 2 + 2 = 4\ u^2$$