Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2024

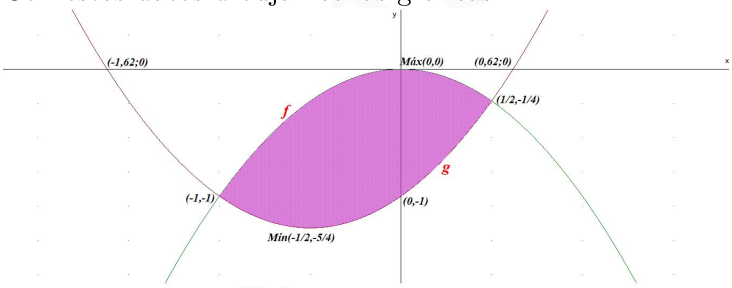
Problema 1 (2,5 puntos) Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

b) (1,25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

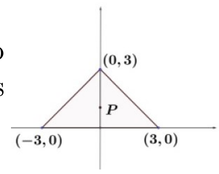
a)
- ☛ La función f es una función PAR con un único punto de corte en $(0,0)$ con $f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un máximo.
- ☛ La función g es una función con puntos de corte en $(0,-1)$, $x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow (0,62;0)$ y $(-1,62;0)$ con $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$ y $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(-1/2) = 2 > 0 \Longrightarrow (-1/2, -5/4)$ es un mínimo.
- ☛ Los puntos de corte de las dos gráficas serán $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 = x^2 + x - 1 \Longrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow (-1,-1)$ y $(1/2, -1/4)$
- ☛ Con estos datos dibujamos las gráficas:



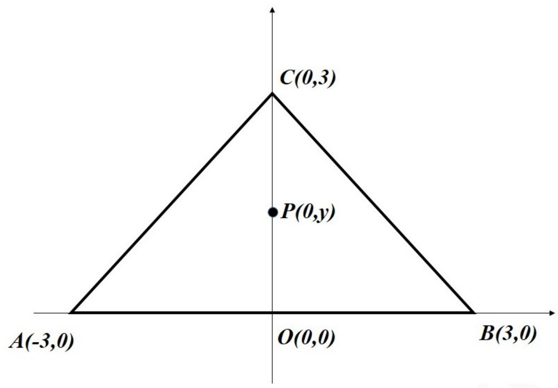
b) El recinto de integración es $S : [-1, 1/2]$:
$S = \int_{-1}^{1/2} (f(x) - g(x))\, dx \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)\, dx = -\dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1/2} = \dfrac{9}{8} \simeq 1,125\ u^2$
El resultado de la integral es positivo por estar la función f por encima de la g.

Problema 2 (2,5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Solución:



Sea $P(0,y)$, $A(-3,0)$, $B(3,0)$ y $C(0,3)$ tenemos:
$d(A,P)=|\overrightarrow{AP}|=|(0,y)-(-3,0)|=|(3,y)|=\sqrt{3^2+y^2}$
$d(B,P)=|\overrightarrow{BP}|=|(0,y)-(3,0)|=|(-3,y)|=\sqrt{(-3)^2+y^2}$
$d(P,C)=|\overrightarrow{CP}|=3-y$
$f(y)=d(A,P)+d(B,P)+d(C,P)=2\sqrt{9+y^2}-y+3$
$f'(y)=\dfrac{2y}{\sqrt{9+y^2}}-1=\dfrac{2y-\sqrt{9+y^2}}{\sqrt{9+y^2}}=0\Longrightarrow y=\sqrt{3}$

	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},3)$
$f'(y)$	$-$	$+$
$f(y)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $y=\sqrt{3}$ es un mínimo y el punto buscado es $P(0,\sqrt{3})$

Problema 3 (2,5 puntos) Sean A, $B\in\mathbb{R}$ y $f(x)=\dfrac{x^2+A}{Bx-1}$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0,-3)$ y tenga un extremo relativo en $x=-1$.

b) (1,25 puntos) Para los valores de $A=3$ y $B=1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

c) (0,5 puntos) Para los valores $A=3$ y $B=1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+A}{Bx-1}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{Bx^2-2x-AB}{(Bx-1)^2}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=-3\Longrightarrow -A=-3\\ f'(-1)=0\Longrightarrow \dfrac{B+2-AB}{(-B-1)^2}=0\Longrightarrow B+2-AB=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=3\\ B=1\end{array}\right.$$

b) Tenemos $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ con $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

☛ Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay.
  $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$
- Oblicuas: $y = mx + n$
  $\displaystyle m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$

  $\displaystyle n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$

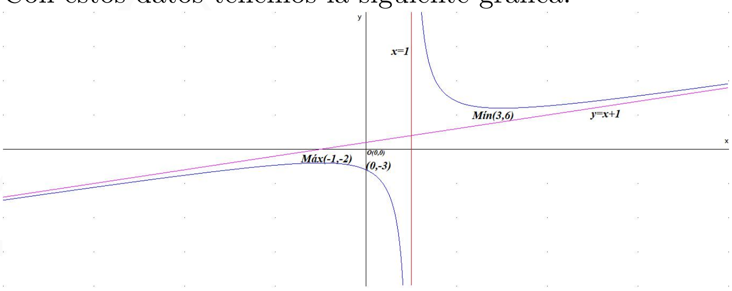
$$y = x + 1$$

☛ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 1) \cup (1, 3)$. La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo relativo en $(3, 6)$.

c) La función tiene un punto de corte con el eje OY en $(0, -3)$ y no corta al eje OX. Con estos datos tenemos la siguiente gráfica:



Problema 4 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

b) (1 punto) Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (xe^{2x^2})\, dx = \left[\begin{array}{c} t = 2x^2 \\ dt = 4xdx \\ dx = \dfrac{dt}{4x} \end{array}\right] = \int (xe^t)\, \frac{dt}{4x} = \frac{1}{4}\int e^t\, dt = \frac{e^t}{4} + C = \frac{e^{2x^2}}{4} + C$

$F(0) = \dfrac{1}{4} + C = -1 \Longrightarrow C = -\dfrac{5}{4} \Longrightarrow F(x) = \dfrac{e^{2x^2} - 5}{4}$

b) $f(x) = xe^{2x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin (0, 1) \Longrightarrow$ sólo hay un recinto de integración $S : [0, 1]$

$$S = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4} \simeq 1,5973\ u^2$$