Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Sea la siguiente función $f(x) = (e^{ax}+b)x-e,\ a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

a) (1,25 puntos) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x = 0$ y un punto de inflexión en $x = 2$.

b) (1,25 puntos) Para los valores $a = 1$ y $b = 2$, calcula $\displaystyle\int xf(x)\,dx$

Solución:

a) $f(x) = (e^{ax}+b)x-e \Longrightarrow f'(x) = e^{ax}(ax+1)+b \Longrightarrow f''(x) = ae^{ax}(ax+2)$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(0) = 0 \Longrightarrow b = -1 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow ae^{2a}(2a+2) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = -1 \end{array}\right. \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

b) $\displaystyle\int xf(x)\,dx = \int x((e^x+2)x-e)\,dx = \int ((e^x+2)x^2-ex)\,dx = -\frac{ex^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\int x^2e^x\,dx =$

$$\left[\begin{array}{c} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = e^xdx \Longrightarrow v = e^x \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] = \frac{2x^3}{3}-\frac{ex^2}{2}+x^2e^x-2\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^xdx \Longrightarrow v = e^x \\ \displaystyle\int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] =$$

$$\frac{2x^3}{3}-\frac{ex^2}{2}+x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)+C = \frac{2x^3}{3}-\frac{ex^2}{2}+x^2e^x-2xe^x+2e^x+C =$$

$$\frac{2x^3}{3}-\frac{ex^2}{2}+e^x(x^2-2x+2)+C$$

Problema 2 (2,5 puntos) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

Solución:

$x+y = \sqrt{3} \Longrightarrow y = \sqrt{3}-x$

$f(x,y) = \log_3 x + \log_3 y \Longrightarrow f(x) = \log_3 x + \log_3(\sqrt{3}-x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} - \frac{1}{(\sqrt{3}-x)\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{\sqrt{3}-2x}{x(\sqrt{3}-x)} = 0 \Longrightarrow \sqrt{3}-2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

	$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ es un máximo. Los números buscados son $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
La suma de sus logaritmos es
$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \log_3\left(\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$
$2(\log_3 \sqrt{3} - \log_3 2) = 1 - 2\log_3 2$

Problema 3 (2,5 puntos) Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$

a) (1,25 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1,25 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad $\cap$ y convexidad $\cup$) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ $(x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1)$
$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y creciente en el $(0, 1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$. En $x = 1$ hay una asíntota vertical.

b) $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	cóncava$\cap$	convexa$\cup$	convexa$\cup$

La función es convexa $\cup$ en $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$ y cóncava $\cap$ en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$. Con un punto de inflexión en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{9}\right)$

Problema 4 (2,5 puntos) Dada la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

a) (1 punto) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,5 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Solución:

a) $x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=-1$ y $x=2$. Como $x^2-x-2>0 \Longrightarrow (-\infty,-1)\cup(2,\infty) \Longrightarrow$ $\text{Dom}(f)=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$.

b) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x=-1$:
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} \text{ no existe límite}$$

- En $x=2$:
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} \text{ no existe límite}$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: en $y=2$
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}} = 2$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to \infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}} = 2$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

No hay ramas parabólicas, los límites cuando x tiende a infinito son finitos.