Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ e^x\cos x & \text{si} \quad 0<x\le 2\pi \end{cases}$

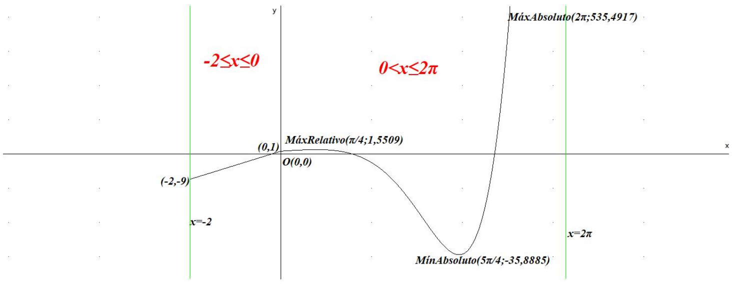
a) (2 puntos) Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) (0,5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Estudiamos la continuidad de la función en $x=0$. Las ramas son continua en el dominio de la función.
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(5x+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^x\cos x)=1 \quad\Longrightarrow \\ f(0)=1 \end{cases}$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1\Longrightarrow f$ continua en $x=0$.
Luego f es continua en el dominio de la función $[-2,2\pi]$. En el punto $x=0$ la función pasa de crecer a crecer y no hay extremo en ese punto.
En la rama $-2\le x\le 0$ la función $f(x)=5x+1$ es una recta que pasa por los puntos $(-2,-9)$ y $(0,1)$ el valor máximo se alcanza en $x=0$ y el mínimo en $x=-2$.

En la rama $0<x\le 2\pi$ la función $f(x)=e^x\cos x$ es una curva entre los puntos $(0,1)$ y $(2\pi,e^{2\pi})\simeq(6,2832;535,4917)$.
$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=0\Longrightarrow \cos x-\sin x=0\Longrightarrow \tan x=1\Longrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$ y $x=\dfrac{5\pi}{4}$
$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$
$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2e^{\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0\Longrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$ es un máximo relativo. Tenemos $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq 1,5509$
$f''\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-2e^{5\pi/4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0\Longrightarrow x=\dfrac{5\pi}{4}$ es un mínimo relativo. Tenemos $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-e^{5\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq -35,88851136$
Con estos datos el mínimo absoluto estaría en el punto $\left(\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{e^{5\pi/4}\sqrt{2}}{2}\right)$ y el máximo absoluto en $\left(2\pi,e^{2\pi}\right)$



b) $a = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow b = f(a) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ y

$m = f'(a) = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -e^{\pi/2} \overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow}$

$y = -e^{\pi/2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow y = -e^{\pi/2}x + \dfrac{e^{\pi/2}\pi}{2}$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln x)^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) (1,25 puntos) Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) (1,25 puntos) Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a) $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ \ln x = -2 \Longrightarrow x = e^{-2} \end{cases}$

	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el $(e^{-2}, 1)$ con un máximo relativo en $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo relativo en $(1, 0)$

b) El mínimo relativo $(1, 0)$ es también absoluto por que la función es siempre positiva. Para estudiar el máximo absoluto calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)^2 = [\infty \cdot \infty] = \infty$$

luego no hay máximo absoluto.

Problema 3 (2,5 puntos) Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx + 2 = 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{1}{x}dx \\ dx = xdt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{x}xdt = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx + 2 = 0 \Longrightarrow F(1) - F(a) = -2 \Longrightarrow 0 - \frac{(\ln a)^2}{2} = -2 \Longrightarrow \ln a = \pm 2 \Longrightarrow$ $a = e^2$ (no válida) y $a = e^{-2}$

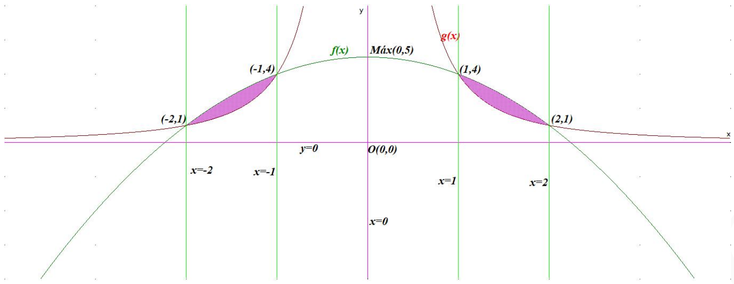
Problema 4 (2,5 puntos) Considera las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$.

a) (1,25 puntos) Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) (1,25 puntos) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

Solución:

a)
- ☛ $f(x) = 5 - x^2$ es una función PAR, corta con el eje de ordenadas en $(0, 5)$ y con el eje de abscisas en los puntos $f(x) = 5 - x^2 = 0 \Longrightarrow (\pm\sqrt{5}, 0)$.
  $f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0, 5)$ es un máximo relativo.
- ☛ $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$ es una función PAR, que no tiene puntos de corte con los ejes coordenados. En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, las ramas se acercan a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$ y cuando $x \to 0^-$, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, ya que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$.
  $f'(x) = -\dfrac{8}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos.
- ☛ Puntos de corte entre las dos funciones:
  $f(x) = g(x) \Longrightarrow 5 - x^2 = \dfrac{4}{x^2} \Longrightarrow -x^4 + 5x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = -2, x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$
  Los puntos serían: $(-2, 1)$, $(-1, 4)$, $(1, 4)$ y $(2, 1)$
  Habrìa dos recintos de integración $S_1 : [-2, -1]$ y $S_2 : [1, 2]$
- ☛ Representación gráfica:



b) $F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int \left(5 - x^2 - \dfrac{4}{x^2}\right) dx = 5x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{x}$

$S_1 = \left| \int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x))\, dx \right| = |F(-1) - F(-2)| = \left|\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} \simeq 0,6667\ u^2$

El resultado de la integral es positivo por estar f por encima de g.

$S_2 = \left| \int_{1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| = |F(2) - F(1)| = \left|\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} \simeq 0,6667\ u^2$

El resultado de la integral es positivo por estar f por encima de g.

Las dos áreas tienen que ser iguales por ser ambas funciones PAR.

$S = S_1 + S_2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3} \simeq 1,3333\ u^2$