Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Considera la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

a) (1,5 puntos) Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

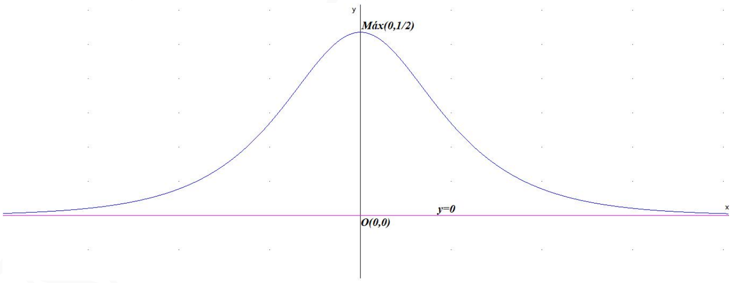
b) (1 punto) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 f(x)\right)$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-e^x + e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{-e^{2x} + 1}{e^x(e^x + e^{-x})^2} = 0 \Longrightarrow -e^{2x} + 1 = 0 \Longrightarrow x = 0$, el denominador no se anula nunca y es siempre positivo.

	$(-\infty, 0)$	$(0, , \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el $(0, \infty)$ con un máximo relativo en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.
El máximo calculado sería absoluto y no habría mínimos ni absolutos ni relativos.
La función crece desde una asíntota horizontal en $y = 0$ y decrece hasta esta misma asíntota:
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x + e^{-x}} = 0 \Longrightarrow y = 0$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x + e^{-x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2}{\infty + 0} = 0$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) (1,5 puntos) Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) (1 punto) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Solución:

a) Calculamos la recta que pasa por los puntos: $A(-2, f(-2)) = A(-2, 1)$ y $B(2, f(2)) = B(2, 9)$
$\overrightarrow{AB} = (4, 8) = 4(1, 2) \Longrightarrow \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} \Longrightarrow 2x + 4 = y - 1 \Longrightarrow$
$y = 2x + 5 \Longrightarrow m = 2$
$f'(x) = 3x^2 - 2$ y tiene que ser $f'(a) = 3a^2 - 2 = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$, como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(0) = 6 \neq 0 \Longrightarrow (0, 5)$ es un punto de inflexión.
La pendiente de la recta tangente en este punto $m_t = f'(0) = -2$, sustituyendo en la ecuación punto pendiente de la recta $y - f(0) = m_t(x - 0) \Longrightarrow y - 5 = -2x \Longrightarrow$
$y = -2x + 5$
La pendiente de la recta normal en este punto $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = \dfrac{1}{2}$, sustituyendo en la ecuación punto pendiente de la recta $y - f(0) = m_n(x - 0) \Longrightarrow y - 5 = \dfrac{1}{2}x \Longrightarrow$
$y = \dfrac{1}{2}x + 5$

Problema 3 (2,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-1) & \text{si} \quad x - 1 < 0 \\ x(x-1) & \text{si} \quad x - 1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Tenemos $b = f(a) = f(0) = 0$ y $m = f'(0) = 1 \overset{y-b=m(x-a)}{\Longrightarrow} y - 0 = 1(x - 0) \Longrightarrow y = x$ es la recta tangente en $x = 0$.
Calculamos los puntos de corte de esta recta con $f(x) \Longrightarrow f(x) = x \Longrightarrow$

$$\begin{cases} -x^2 + x = x \Longrightarrow x = 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x = x \Longrightarrow x = 0 \text{ (no válida) y } x = 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Habrá dos recintos de integración $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$:

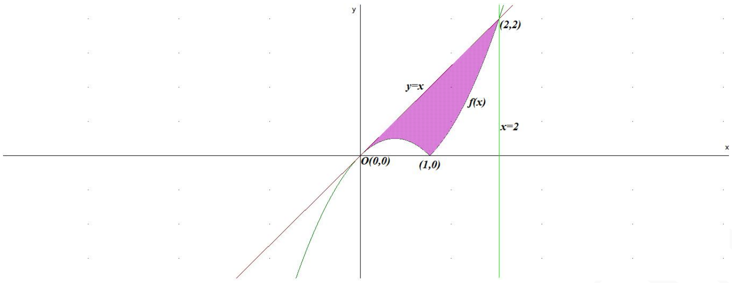
$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - x)\, dx = \int_0^1 (-x^2 + x - x)\, dx = \int_0^1 (-x^2)\, dx = \left.\frac{-x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{-1}{3}$$

Sale negativa por estar la tangente por encima de la función.

$$S_2 = \int_1^2 (f(x) - x)\, dx = \int_1^2 (x^2 - x - x)\, dx = \int_1^2 (x^2 - 2x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = \frac{-2}{3}$$

Sale negativa por estar la tangente por encima de la función.

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1\ u^2$$



Problema 4 (2,5 puntos) Sea la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} ax - \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

a) (1,25 puntos) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1,25 puntos) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y di que tipo de extremo es.

Solución:

a) f es continua en las dos ramas para $x \neq 0$, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(ax - \dfrac{\sin x}{x} + 2\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax^2 - \sin x + 2x}{x} == \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2ax - \cos x + 2}{1} = 1 \neq f(0) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ independientemente del valor de $a \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \begin{cases} a - \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \Longrightarrow f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = a - \dfrac{0+1}{(-\pi/2)^2} = a - \dfrac{4}{\pi^2} = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{4}{\pi^2}$
$f'(x) = \dfrac{4}{\pi^2} - \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$

www.musat.net

Elijo dos valores próximos a $x = -\frac{\pi}{2} \simeq -1,5708$ por exceso $x = -1$ y por defecto $x = -2$ y por defecto:

	$(-2; -1,570)$	$(-1,570; -1)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Luego $x = -\frac{\pi}{2}$ es un mínimo relativo.

www.musat.net