# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

**Noviembre 2023**

---

**Problema 1** (2,5 puntos) Dada la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

a) (1,25 punto) Discute el rango de la matriz $A$ según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

b) (1,25 punto) Calcula la inversa de la matriz $A$ para el valor $m=1$.

**Solución:**

a) $|A|=-m^3+2m=0\Longrightarrow m=0$ y $m=\pm\sqrt{2}$

- ☛ Si $m\in\mathbb{R}-\{0,\pm\sqrt{2}\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3$.
- ☛ Si $m=0\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.
- ☛ Si $m=\sqrt{2}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2}\\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}+2\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.
- ☛ Si $m=-\sqrt{2}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2}\\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}+2\\ -\sqrt{2}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ con $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -\sqrt{2}\end{vmatrix}=-\sqrt{2}+2\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.
- ☛ Si $m=0$ o $m=\pm\sqrt{2}\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.
  Si $m\in\mathbb{R}-\{0,\pm\sqrt{2}\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3$.

b) Si $m=1$ tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}$

**Problema 2** (2,5 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real $\lambda$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0\\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3\\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3\end{array}\right.$$

www.musat.net

a) (1,25 puntos) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro $\lambda$.

b) (1,25 puntos) Para el caso $\lambda = -1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución.

**Solución:**

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 9\lambda^3 + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- Si $\lambda = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 2y = -\mu \\ y = 1 + \mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{array}\right. \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

Los tres planos se cortan en la recta que hemos calculado.
Para descartar la coincidencia de dos de ellos comprobamos que se cortan dos a dos:

Sean $\left\{\begin{array}{l} \pi_1 : x - 2y + z = 0 \\ \pi_2 : x + y + -2z = 3 \\ \pi_3 : -2x + y + z = -3 \end{array}\right.$, comparamos: $\left\{\begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2 : \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-2}{1} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan} \\ \pi_1 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{-2}{1} \Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se corta} \\ \pi_2 \text{ con } \pi_3 : \dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{1}{1} \Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}\right.$

Luego los planos se cortan dos a dos y, en conjunto, en una recta, como un libro de tres hojas.

**Problema 3** (2,5 puntos) Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) (1 punto) Sean $C$ y $D$ dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$. Compruebe que las dos matrices son idempotentes.
**Nota:** Una matriz cuadrada se denomina "*idempotente*" si coincide con su cuadrado.

**Solución:**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$

b) $C = C \cdot D \Longrightarrow C^2 = C \cdot (D \cdot C) \overset{D \cdot C = D}{=} C \cdot D = C \Longrightarrow C^2 = C$ luego $C$ es *idempotente*

$D = D \cdot C \Longrightarrow D^2 = D \cdot (C \cdot D) \overset{C \cdot D = C}{=} D \cdot C = D \Longrightarrow D^2 = D$ luego $D$ es *idempotente*

**Problema 4** (2,5 puntos) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{array} \right.$, donde $m$ es un número real.

a) (1,25 puntos) Discute el sistema según los valores del parámetro $m$.

b) (1,25 puntos) Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$.

**Solución:**

Tenemos $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + my + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y - mz = 3 \end{array} \right.$

a) $\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -m & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 2m^2 - 4m = 2m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 2$.

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $m = 0$:
$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$
$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

☛ Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 5F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

b) Si $m = 1$ resolvemos por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2z = 3 \Longrightarrow z = \dfrac{3}{2} \\ -y - \dfrac{9}{2} = -3 \Longrightarrow y = -\dfrac{3}{2} \\ x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \Longrightarrow x = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$