Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Noviembre 2023

Problema 1 (2 puntos) Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = AB^T - 2I$$

donde B^T es la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX = A^T B$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $D = AB^T - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|D| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $CX = A^T B \Longrightarrow \Longrightarrow X = C^{-1} A^T B =$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A + 2I)X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}A$,

$$A^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) A^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 A = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \left(-\frac{3}{2}\right) A^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 A = \begin{pmatrix} -\frac{27}{16} & -\frac{27}{8} \\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} A = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $(A+2I)X = B \Longrightarrow X = (A+2I)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

Solución:

Sean x el número de voluntarios de la sede de Huesca, y de Zaragoza y z de Teruel.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x-1=y+z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=31 \\ x-y=6 \\ x-y-z=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=16 \text{ voluntarios} \\ y=10 \text{ voluntarios} \\ z=5 \text{ voluntarios} \end{array} \right.$$

Problema 4 (2 puntos) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) (0,5 puntos) Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

b) (1 punto) Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

c) (0,5 puntos) Para $a = 1$, calcula $det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

Solución:

a) $|P| = 2a - 4$; $|P| = 0 \Longrightarrow a = 2$

- ☛ Si $a \neq 2 \Longrightarrow |P| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 3$
- ☛ Si $a = 2 \Longrightarrow |P| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(P) = 2$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow |P| = -2 \Longrightarrow \exists P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $|PM| = |P||M|$ y $|M^2| = |M|^2 = |M||M| \Longrightarrow |P||M| = |M||M| \Longrightarrow \begin{cases} |M| = 0 \\ |P| = |M| = -2 \end{cases}$

Problema 5 (2 puntos) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = a \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) (1,25 puntos) Determine para qué valores de a el sistema es incompatible.

b) (1,25 puntos) Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ es $|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
El sistema no puede ser incompatible $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) Si $a = 4$ el sistema tiene solución única es SCD:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ x - y + z = 4 \\ -x + y - 2z = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Reuelto por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible determinado

$$\left\{ \begin{array}{l} -2z = 2 \Longrightarrow z = -1 \\ -5y - 1 = 9 \Longrightarrow y = -2 \\ 2x - 6 - 1 = -1 \Longrightarrow x = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$