Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60 % de los coches blancos más el 50 % de los coches negros representan el 30 % de los coches vendidos. El 20 % de los coches blancos junto con el 60 % de los coches negros y el 60 % de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Solución:

Sean x el númerro de coches blancos, y negros y z rojos.

$$\begin{cases} 0,6x + 0,5y = 0,3(x+y+z) \\ 0,2x + 0,6y + 0,6z = 0,5(x+y+z) \\ y = 100 + x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 3(x+y+z) \\ 2x + 6y + 6z = 5(x+y+z) \\ y = 100 + x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ x - y = -100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 500 \text{ blancos} \\ y = 600 \text{ negros} \\ z = 900 \text{ rojos} \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (0,5 puntos) Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A.

b) (2 puntos) Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

Solución:

a) $|A| = m^3 = 0 \Longrightarrow m = 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $AX + X = B \Longrightarrow (A+I)X = B \Longrightarrow X = (A+I)^{-1}B$

$|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = m^3 + 1 = 0 \Longrightarrow m = -1 \Longrightarrow \exists (A+I)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Como $m \neq -1$ podemos calcular su inversa:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m^3+1} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \frac{1}{m^3+1} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix} \text{ con } m \neq -1$$

Problema 3 (2 puntos) Dado el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + mz = 0 \\ my + 2z = 2 + m^2 \\ x + y = 2m \end{array}\right.$$

a) (1,2 puntos) Discute segun los valores de $m \in \mathbb{R}$, que tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{array}\right); \quad |A| = 2 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

- Si $m \neq \pm\sqrt{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = -\sqrt{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \sqrt{2}F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- Si $m = \sqrt{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \sqrt{2}F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 6 \\ x + y = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Problema 4 (2 puntos) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A + 2I)X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2}A$,

$$A^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) A^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 A = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \left(-\frac{3}{2}\right) A^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 A = \begin{pmatrix} -\frac{27}{16} & -\frac{27}{8} \\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} A = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $(A+2I)X = B \Longrightarrow X = (A+2I)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$