Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2023

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & m+1 & 6 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m - 2 = 0 \Longrightarrow m = -1,\ m = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6m^2 - 3m - 18 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{3}{2},\ m = 2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & 3 & m \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & m+1 \end{vmatrix} = 3(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 6 \end{vmatrix} = -3(m^2 - m - 2) = 0 \Longrightarrow m = -1,\ m = 2$$

Si $m \neq 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Problema 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -a \\ 0 & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -a \\ 0 & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$A^2 = 5A - 4I = 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = (5A - 6I)A = 5A^2 - 6A = 5(5A - 6I) - 6A = 19A - 30I$

$$A^3 = 19 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 30 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (19A - 30I)A = 19A^2 - 30A = 19(5A - 6I) - 30A = 65A - 114I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (65A - 114I)A = 65A^2 - 114A = 65(5A - 6I) - 114A = 211A - 390I$$

$$A^5 = 211 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 390 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -211 \\ 0 & 243 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 7/2 & -5/2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a = 2a + b \Longrightarrow b = 0 \\ 2b = -b \Longrightarrow b = 0 \\ a - c = 2c + d \Longrightarrow a = 3c + d \\ b - d = -d \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.