Examen de Matemáticas CCSSII (Ordinaria-Coincidente 2023)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A^2 - A$.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

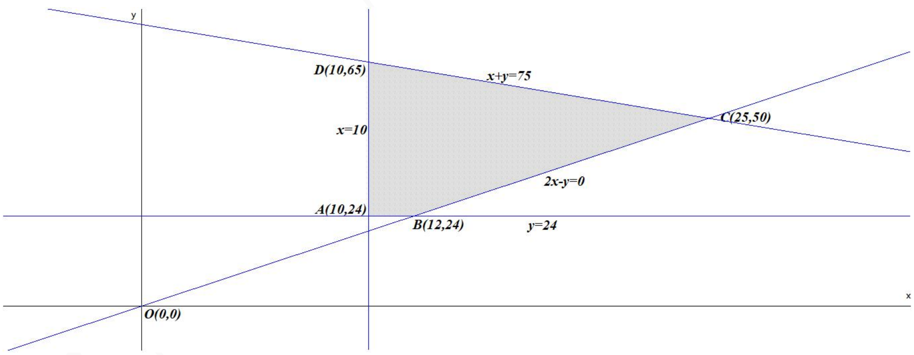
Problema 2 *(2 puntos)* En una cooperativa se produce aceite de girasol y de oliva. Hay que producir al día como mínimo 10 litros de aceite de girasol y 24 litros de aceite de oliva. Además, los litros de aceite de oliva producidos deben ser al menos el doble de los litros de aceite de girasol y no hay capacidad para producir en total más de 75 litros al día. Sabiendo que un litro de aceite de girasol da un beneficio de 1 euro y que un litro de aceite de oliva da un beneficio de 3 euros, ¿cuántos litros de aceite de cada tipo habrá que producir para maximizar el beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución:

Sean x litros de aceite de girasol e y litros de aceite de oliva.

Región factible:

$$\begin{cases} x + y \leq 75 \\ y \geq 2x \\ x \geq 10 \\ y \geq 24 \end{cases}$$



Los vértices son $A(10, 24)$, $B(12, 24)$, $C(25, 50)$ y $D(10, 65)$

La función objetivo es $f(x,y) = x + 3y$

$$\begin{cases} f(10,24) = 82 \\ f(12,24) = 84 \\ f(25,50) = 175 \\ f(10,65) = 205 \end{cases}$$

El beneficio máximo es de 205€ vendiendo 10 l de girasol y 65 l de oliva.

Problema 3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = ax^2 + 4x + 5$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Para $a = 1$ obtenga la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) $f'(x) = 2ax + 4 \Longrightarrow f'(1) = 2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$.

b) La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a)$, en nuestro caso $a = 0$. $f(x) = x^2 + 4x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 4 \Longrightarrow m = f'(0) = 4$ y $b = f(0) = 5 \Longrightarrow y - 5 = 4x \Longrightarrow y = 4x + 5$

Problema 4 *(2 puntos)* El informe ALADINO es un estudio de la Agencia Española de Seguridad Alimentaria y Nutrición (AESAN) que se realiza a escolares de 6 a 9 años residentes en España. En el informe de 2019, el 50,2 % de los escolares encuestados tenían entre 6 y 7 años, los restantes tenían entre 8 y 9 años. Según los estándares de la Organización Mundial de la Salud (OMS), se observó que el 23 % de los escolares estudiados presentaban sobrepeso y que en el grupo de escolares con 6-7 años de edad el 78 % no tenía sobrepeso. Eligiendo un escolar al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 6-7 años de edad.

b) No tenga sobrepeso y pertenezca al grupo de escolares con 8-9 años de edad.

Solución:

Sean A entre 6 y 7 años, B entre 8 y 9 años, S tiene sobrepeso y $\overline{S}$ no tiene sobrepeso.

Tenemos $P(\overline{S}|A) = \dfrac{P(\overline{S} \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(\overline{S} \cap A) = P(\overline{S}|A) \cdot P(A) = 0,78 \cdot 0,502 = 0,39156$

	S	$\overline{S}$	
A		0,39156	0,502
B			
	0,23	0,77	1

$\Longrightarrow$

	S	$\overline{S}$	
A	0,11044	0,39156	0,502
B	0,11956	0,37844	0,498
	0,23	0,77	1

a) $P(S \cap A) = 0,11044$.

b) $P(\overline{S} \cap B) = 0,37844$

Problema 5 *(2 puntos)* Para estimar el porcentaje de países firmantes de la Agenda 2030 que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible se tomó una muestra de países al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,20$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de países para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 34 países, de los cuales 10 cumplían al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de países firmantes que cumplen en 2022 al menos la mitad de los objetivos de desarrollo sostenible.

Solución:

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$P = 0,20$ y $Q = 0,80$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{PQ}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,2 \cdot 0,8}{n}} = 0,05 \Longrightarrow n \geq 245{,}8624 \Longrightarrow n = 246$

b) $\hat{p} = \dfrac{10}{34} = 0,2941$, $\hat{q} = 0,7059$ y $n = 34$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,2941 \cdot 0,7059}{34}} = 0,1532$

$$(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,141; 0,4473)$$

Examen de Matemáticas CCSSII (Ordinaria-Coincidente 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$

☛ Si $a \in R - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

b) Si $a = -1$:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \dfrac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x + a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Para $a = 1$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) ☛ Las dos ramas son continuas, independientemente del valor de a.

☛ Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (2x + a) = a \\ f(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

b) Si $a = 1$ y el área pedida se encuentra en el intervalo $[1, 3]$ hay que comprobar si la rama $f(x) = 2x + 1$ corta al eje de abscisas dentro del intervalo: $2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$, luego la función no corta al eje de abscisas dentro del intervalo y los límites de integración serán 1 y 3.

$$S = \int_1^3 (2x + 1)\, dx = x^2 + x\Big]_1^3 = 12 - 2 = 10\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

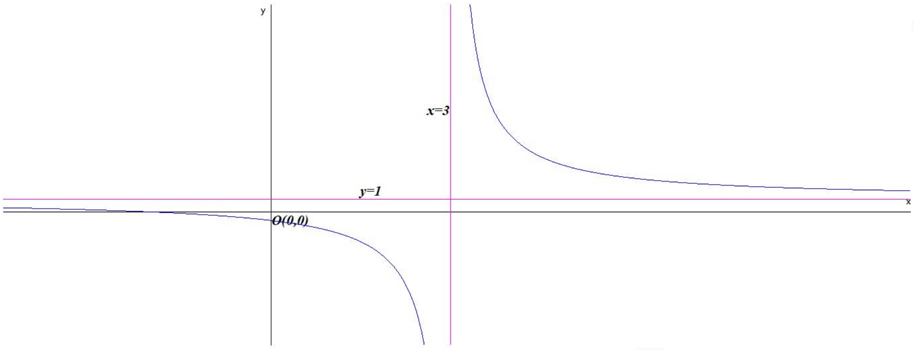
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ y sus asíntotas:

- Verticales en $x = 3$:
  $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+2}{x-3} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x+2}{x-3} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty$
- Horizontales en $y = 1$:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{x-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-3} = 1$
- Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{5}{(x-3)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) < 0 \; \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ la función es decreciente en todo el dominio de la función.

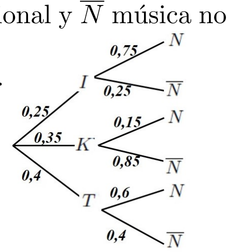


Problema 4 *(2 puntos)* En un festival de música actúan varios grupos del panorama nacional e internacional reconocidos en la industria musical actual. Los artistas se agrupan por estilo musical en las siguientes categorías: el 25 % son bandas de música *indie*, el 35 % de *k-pop* y el resto de música *trap*. Además, se sabe que son nacionales el 75 % de los grupos *indie*, el 15 % de las agrupaciones de *k-pop* y el 60 % de los artistas *trap*. Eligiendo un grupo musical al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea nacional.

b) Toque música *indie*, sabiendo que es nacional.

Solución:
Sean I música *indie*, K música *k-pop*, T música *trap*, N música nacional y $\overline{N}$ música no nacional.



a) $P(N) = P(N|I)P(I) + P(N|K)P(K) + P(N|T)P(T) = 0,75 \cdot 0,25 + 0,15 \cdot 0,35 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$

b) $P(I|N) = \dfrac{P(N|I)P(I)}{P(N)} = \dfrac{0,75 \cdot 0,25}{0,48} = 0,390625$

Problema 5 *(2 puntos)* El porcentaje de agua en el cuerpo humano se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas, obteniéndose una media muestral de 65 puntos. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 personas, la media muestral, $\overline{X}$, este comprendida entre 65 y 69 puntos.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $NC = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$\overline{X} = 65$ y $n = 20$:
$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{8}{\sqrt{20}} = 4,6063$

$$\left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (60,3937; 69,6063)$$

b) $N(67; 8) \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(67; \dfrac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(67; 2,5298)$
$P(65 \le \overline{X} \le 69) = \left(\dfrac{65-67}{8/\sqrt{10}} \le Z \le \dfrac{69-67}{8/\sqrt{10}}\right) = P(-0,79 \le Z \le 0,79) = P(Z \le 0,79) - P(Z \le -0,79) = 2P(Z \le 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 0,5704$