# Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-Coincidente 2023) Selectividad-Opción A

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** (2 puntos) Se consideran las matrices $A$ y $B$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine la matriz $X$ tal que, $A \cdot X = B$.

b) Calcule $B \cdot B^t \cdot A^{-1}$, donde $B^t$ denota la matriz transpuesta de $B$ y $A^{-1}$ la matriz inversa de $A$.

**Solución:**

a) Como $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $B \cdot B^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

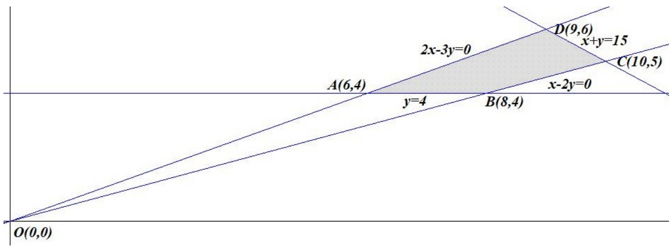
**Problema 2** (2 puntos) Una familia acaba de comprar una parcela y desea construir en ella una piscina rectangular. Tiene que decidir el largo y el ancho de la piscina sabiendo que el largo no puede ser más de 2 veces el ancho, y que 3 veces el ancho no puede sobrepasar a 2 veces el largo. Además, el perímetro debe tener 30 metros como máximo y quieren que la piscina tenga al menos 4 metros de ancho. ¿Qué dimensiones deben elegir si quieren una piscina lo más larga posible?

**Solución:**

Sean $x$ largo de la piscina e $y$ ancho de la piscina.

a) La región factible:

$$S : \begin{cases} x \le 2y \\ 3y \le 2x \\ 2x + 2y \le 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y \le 0 \\ 2x - 3y \ge 0 \\ x + y \le 15 \\ x \ge 0 \\ y \ge 4 \end{cases}$$



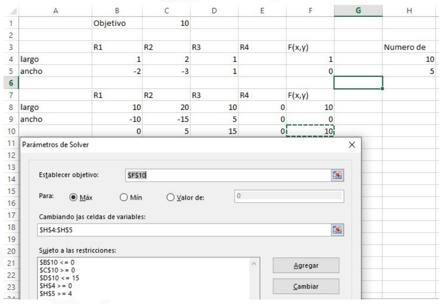

Los vértices a estudiar serán: $A\,(6,4)$, $B(8,4)$, $C(10,5)$ y $D(9,6)$.

b) $f(x,y) = x$ en $S$:

Solución por solver

$$\left\{\begin{array}{l} f\,(6,4) = 6 \\ f(8,4) = 8 \\ f(10,5) = 10 \\ f(9,6) = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

El máximo largo es de 10 m con un ancho de 5 m.




**Problema 3** (2 puntos) Dada la siguiente función real de variable real

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2e^{x-3} & \text{si} & x \le 3 \\ \\ \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} & \text{si} & x > 3 \end{array}\right.$$

a) Obtenga el valor del parámetro real $a$ para que la función sea continua en $x = 3$.

b) Para $a = 1$, determine los maximos y minimos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

**Solución:**

a) Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax^2e^{x-3}) = 9a \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-1}{2x-3} = \dfrac{5}{3} \\ f(3) = 9a \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$9a = \frac{5}{3} \Longrightarrow a = \frac{5}{27}$$

b) $f(x) = x^2e^{x-3} \Longrightarrow f'(x) = x(x+2)e^{x-3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$. Ambos puntos pertenecen a la rama $(-\infty, 3]$.

$$f''(x) = (x^2+4x+2)e^{x-3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 2e^{-3} > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ Mínimo} \\ f''(-2) = -2e^{-5} < 0 \Longrightarrow x = -2 \text{ Máximo} \end{cases}$$

**Problema 4** (2 puntos) Sean dos sucesos $A$ y $B$ tales que $P(A) = 0,57$, $P(B) = 0,46$ y $P(A \cap B) = 0,28$. Calule las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B$.

b) $P(B|\overline{A})$ siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de $A$.

**Solución:**

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,57 + 0,46 - 0,28 = 0,75$

b) $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,46 - 0,28}{1 - 0,57} = 0,4186$

**Problema 5** (2 puntos) La longitud en metros de un coche se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma = 0,2$ metros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de $\mu$ sea menor de 4 centímetros con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 4$ metros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 36$ coches, la longitud media, $\overline{X}$, sea mayor de 4,04 metros.

**Solución:**

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,04 = 1,96\dfrac{0,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 96,04 \Longrightarrow n = 97.$

b) $n = 36$, $\mu = 4$ y $\overline{X} \approx N\left(4; \dfrac{0,2}{\sqrt{36}}\right) = N(4; 0,0333)$

$P(\overline{X} \ge 4,04) = P\left(Z \ge \dfrac{4,04 - 4}{0,0333}\right) = P(Z \ge 1,2) =$
$1 - P(Z \le 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$

# Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-Coincidente 2023) Selectividad-Opción B

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + y + 2z = 2 \\ x - az = 0 \\ 3x - y - z = 2a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de $a$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

**Solución:**

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2a \end{array}\right); \quad |A| = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -1, \quad a = -\frac{1}{2}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{2}\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -\frac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + 3F_1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 2z = 2 \\ x - z = 0 \\ 3x - y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -2/3 \\ z = 2/3 \end{array} \right.$$

**Problema 2** (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real dependiente de un parámetro real $a$:

$$f(x) = -x^3 + 4ax^2 - 17x + 5a$$

a) Calcule el valor de $a$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea la misma que la pendiente de la recta $g(x) = \sqrt{3} - 4x$.

b) Para $a = 0$, obtenga el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

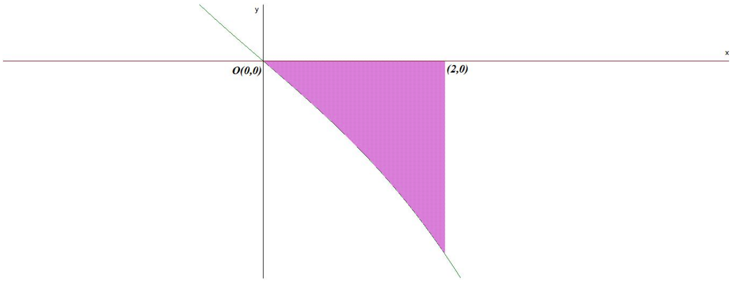
**Solución:**

a) $f'(x) = -3x^2 + 8ax - 17 \Longrightarrow m = f'(1) = -20 + 8a$.
$g'(x) = -4 \Longrightarrow g'(1) = 4$ como $f'(1) = g'(1) \Longrightarrow -20 + 8a = -4 \Longrightarrow$ $a = 2$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow f(x) = -x^3 - 17x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{17}$. Ninguno de estos valores están dentro del intervalo de integración, luego sólo hay un área a estudiar $S_1 : [0, 2]$.

$$S_1 = \int_0^2 (-x^3 - 17x)\, dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{17x^2}{2} \Big]_0^2 = -38 + 0 = 38$$

$$S = |S_1| = 38\ u^2$$




**Problema 3** (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Determine las asíntotas de la función.

**Solución:**

a) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

| | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3}, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$, con un máximo relativo en $(-\sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})$.

b) $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{x}\right) = 4$$

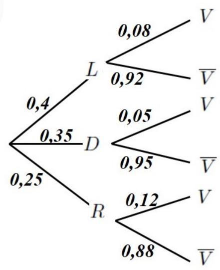
$$y = x + 4$$

**Problema 4** (2 puntos) Un restaurante de comida rápida sirve el 40 % de los menús para consumir en el local, el 35 % es transportado por motoristas a domicilio (delivery) y el resto de menús son recogidos por los clientes en el local (take-away). El restaurante tiene un menú vegetariano que es consumido por el 8 % de los clientes en el local, el 5 % de los pedidos a domicilio y el 12 % de los recogidos en el local por los propios clientes. Eligiendo un menú al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea vegetariano.

b) Haya sido llevado a domicilio por un motorista, sabiendo que es vegetariano.

**Solución:**
Sean $L$ consume en el local, $D$ se transporta a domincilio, $R$ lo recoge el cliente, $V$ menú vegetariano y $\overline{V}$ menú no vegetariano.




a) $P(V) = P(V|L)P(L) + P(V|D)P(D) + P(V|R)P(R) =$
$0,08\cdot 0,4 + 0,05\cdot 0,35 + 0,12\cdot 0,25 = 0,0795$

b) $P(D|V) = \dfrac{P(V|D)P(D))}{P(V)} = \dfrac{0,05\cdot 0,35}{0,0795} = 0,2201$

**Problema 5** (2 puntos) La vida media de una persona medida en semanas se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma = 300$ semanas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 personas ya fallecidas, obteniendose una media muestral de 4020 semanas. Determine un intervalo de confianza al 99 % para $\mu$.

b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para que la longitud del intervalo anterior no sobrepase las 100 semanas?

**Solución:**

$$N(\mu; 300)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 4020$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{300}{\sqrt{20}} = 172,7363$$

$$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (4020-172,7363; 4020+172,7363) = (3847,2637; 4192,7363)$$

b) $E = \frac{100}{2} = 50 \Longrightarrow 50 = 2,575\frac{300}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq \left(\frac{2,575 \cdot 300}{50}\right)^2 = 238,7025 \Longrightarrow n = 239$