Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2023) Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Determine A^3 y A^{2023}.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{2023} = (A^3)^{674}A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = A^2$ ya que $A \cdot A^2 = A^3 = I \Longrightarrow$
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x \Longrightarrow m = f'(1) = 7$, $a = 1$ y $b = f(a) = f(1) = 3$.
La ecuación punto pendiente de una recta es $y - b = m(x - a) \Longrightarrow$
$y - 3 = 7(x - 1) \Longrightarrow y = 7x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -\dfrac{4}{3}$

$$f''(x) = 6x + 4 \Longrightarrow \begin{cases} f''(0) = 4 > 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ mínimo} \\ f''\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -4 < 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{4}{3} \text{ máximo} \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Considere la función real de variable real.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ e^x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Continuidad en $x = 2$:

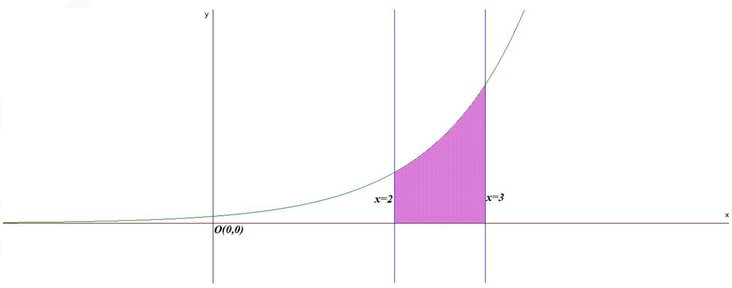
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax^2 + 3) = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (e^x) = e^2 \\ f(2) = e^2 \end{cases} \Longrightarrow 4a + 3 = e^2 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1,097264024$$

b) $f(x) = e^x \neq 0 \Longrightarrow$ sólo hay un recinto de integración $S_1 : [2, 3]$:

$$S_1 = \int_2^3 e^x\, dx = e^x\big]_2^3 = e^3 - e^2$$

$$S = |S_1| = e^3 - e^2 \simeq 12,696\ u^2$$



Problema 4 (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 %de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Solución:
Sean A practica actividad física y F come de 1 a 4 porciones de fruta.
Tenemos: $P(A) = 0,274$, $P(F) = 0,651$ y $P(A \cup F) = 0,763$

a) $P(A\cup F) = P(A)+P(F)-P(A\cap F) \Longrightarrow P(A\cap F) = P(A)+P(F)-P(A \cup F) = 0,274 + 0,651 - 0,763 = 0,162$

b) $P(\overline{A}|\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(\overline{A \cup F})}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - P(A \cup F)}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - 0,763}{1 - 0,651} = 0,6791$

Problema 5 (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Solución:

a) $NC = 0,9901 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0099 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,00495$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,99505 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,1 = 2,575\sqrt{\dfrac{0,55\cdot 0,45}{n}} \Longrightarrow n \geq 164,1079687 \Longrightarrow$
$n = 165.$

b) $NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$n = 100,\ \hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0,7$ y $\hat{q} = 0,3 \Longrightarrow$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,7\cdot 0,3}{100}} = 0,0898$
$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,7-0,0898; 0,7+0,0898) = (0,6102; 0,7898)$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + y + 2z = 1\\ x + ay + 2z = a\\ x + 2y + az = 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1\\ 1 & a & 2 & a\\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right);\quad |A| = a^3 - 7a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -3,\ \ a = 1,\ \ a = 2$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ 3F_2 + F_1\\ 3F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 8 & -8\\ 0 & 7 & -7 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3+7F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/6 \end{array} \right.$$

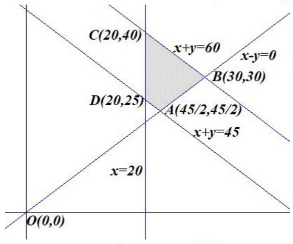
Problema 2 (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Solución:

Sean x tiempo de entrenamiento de fuerza e y tiempo de entrenamiento cardiovascular.

a) La región factible:

$$S:\begin{cases}45\le x+y\le 60\\ x\le y\\ x\ge 20\\ y\ge 0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x+y\le 60\\ x+y\ge 45\\ x\le y\\ x\ge 20\\ y\ge 0\end{cases}$$



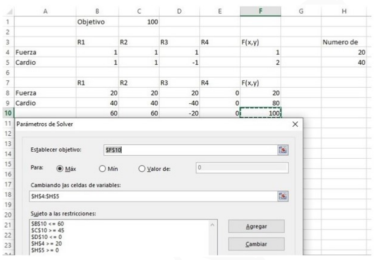
Los vértices a estudiar serán: $A\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)$, $B(30,30)$, $C(20,40)$ y $D(20,25)$.

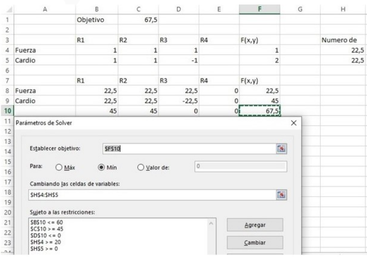
b) $f(x,y)=x+2y$ en S:

$$\begin{cases}f\left(\frac{45}{2},\frac{45}{2}\right)=\frac{135}{2}=67,5\\ f(30,30)=90\\ f(20,40)=100\\ f(20,25)=70\end{cases}\quad\Longrightarrow$$

El entrenamiento más beneficioso sería con 20 minutos de fuerza y 40 de cardiovascular, con una duración de 100 totales.
El entrenamiento menos beneficioso sería con 22,5 minutos de fuerza y 22,5 de cardiovascular, con una duración de 67,5 totales.

Solución por solver





Problema 3 (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x)=x+\frac{2}{x}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$$f(x)=x+\frac{2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$$

a) $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$, con un máximo relativo en $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Problema 4 (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

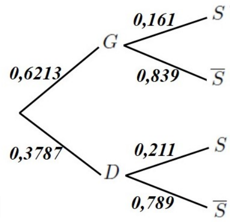
a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

Solución:

Sean G modalidad general, D jóvenes doctores, S seleccionado y $\overline{S}$ no seleccionado.

Tenemos: $P(G) = \dfrac{2159}{2159 + 1316} = 0,6213$, $P(D) = 1 - 0,6213 = 0,3787$, $P(S|G) = 0,161$ y $P(S|D) = 0,211$



a) $P(S) = P(S|G)P(G) + P(S|D)P(D) =$
$0,161 \cdot 0,6213 + 0,211 \cdot 0,3787 = 0,179935$

b) $P(G|S) = \dfrac{P(S|G)P(G)}{P(S)} = \dfrac{0,161 \cdot 0,6213}{0,179935} =$
$0,55592$

Problema 5 (2 puntos) La distancia diaria en kilometros recorrida por un autobus urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribucion normal de media desconocida μ y desviacion tipica igual a 2 kilometros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilométros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $n = 20$, $\overline{X} = 50$ y $NC = 99\,\% = 0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} =$
$0,005$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{2}{\sqrt{20}} = 1,1516$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (50 - 1,1516; 50 + 1,1516) = (48,8484; 51,1516)$$

b) $NC = 90\,\% = 0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = 1 \Longrightarrow 1 = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,645 \cdot 2}{1}\right)^2 = 10,8241 \Longrightarrow n = 11$$