Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2023

Problema 1 Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

a) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) Represente gráficamente la función.

c) Calcule $\int f(x)\,dx$.

d) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

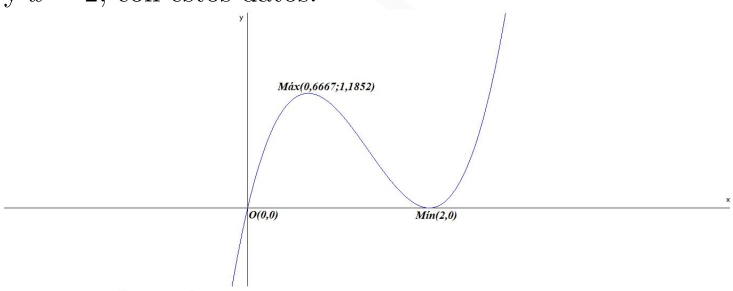
Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ y $x = 2$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

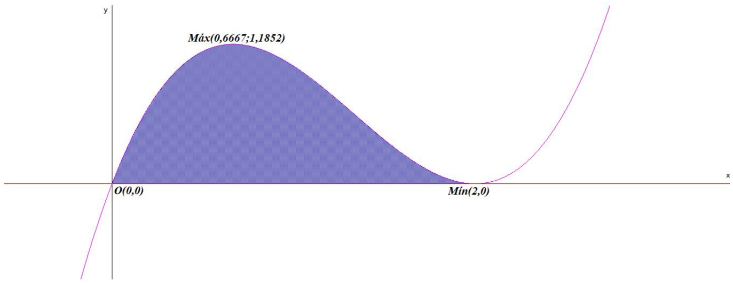
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2/3) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(2/3, 2)$, tiene un máximo relativo en $x = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{32}{27}\right) = (0,6667; 1,1852)$ y un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$.

b) Los puntos de corte con el eje de abscisas son $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$, con estos datos:



c) $F(x) = \int (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

d) $S=\displaystyle\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)\,dx = F(2)-F(0)=\frac{4}{3}\ u^2$



Problema 2 Se pide:

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right);\quad g(x)=x^3e^{2x^2}$$

b) Represente gráficamente la parábola $h(x)=x^2+x+1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

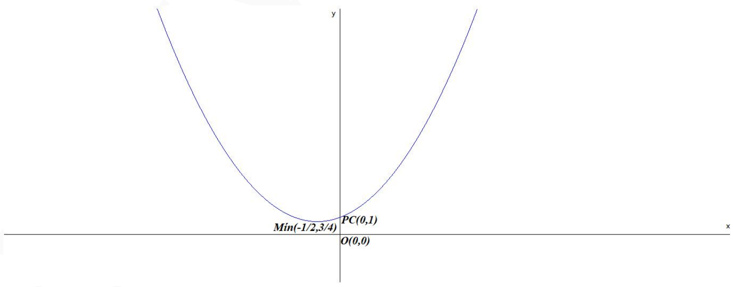
c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x)=x^2+x+1$, el eje de abscisas y las rectas $x=-\dfrac{1}{2}$ y $x=0$.

Solución:

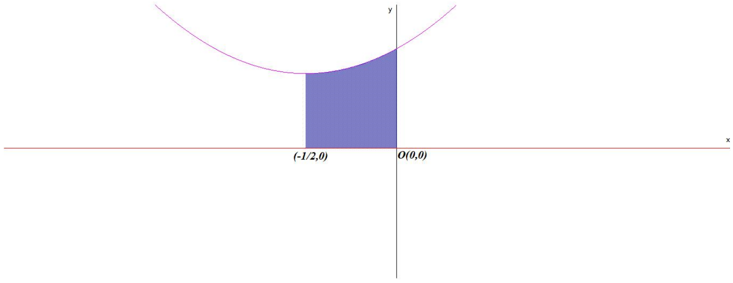
a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+1)\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$

$g(x)=x^3e^{2x^2}\Longrightarrow g'(x)=3x^2e^{2x^2}+4x^4e^{2x^2}=x^2e^{2x^2}(3+4x^2)$

b) Punto de corte con el eje de ordenadas $x=0\Longrightarrow h(0)=1\Longrightarrow (0,1)$. Con el eje de abscisas $h(x)=0\Longrightarrow x^2+x+1=0\Longrightarrow$ no tiene solución y, por tanto, no hay puntos de corte con el eje de abscisas.
$h'(x)=2x+1=0\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.
$h''(x)=2\Longrightarrow h''\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2>0\Longrightarrow\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$ es un mínimo.



c) $S=\int_{-1/2}^{0}(x^2+x+1)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{+}x\right]_{-1/2}^{0}=\frac{5}{12}\ u^2$



Problema 3 Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t)=\frac{2t-6}{t+4}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a) ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b) En qué momento $t\in[3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000€?

d) En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Solución:

a) Como t es positivo tenemos que el denominador $t+4>0$. por otra parte $2t-6=0\Longrightarrow t=3$, luego la función beneficio es negativa de 0 a 3 años. En el intervalo $[0,3)$.

b) $B'(t)=\dfrac{14}{(t+4)^2}>0\Longrightarrow$ no hay extremos relativos y la función es siempre creciente, luego el máximo beneficio en el intervalo $[3,10]$ se produce cuando $t=10\Longrightarrow B(10)=1\Longrightarrow 100000$€

c) $B(t)=\dfrac{2t-6}{t+4}=1,5\Longrightarrow 2t-6=1,5t+6\Longrightarrow t=24$ años.

d) $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}B(t)=\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\dfrac{2t-6}{t+4}=2\Longrightarrow$ los beneficios tienden a estabilizarse en 200000€.

Problema 4 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

c) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$.

Solución:

a) ☛ Continua en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{a}{1-x} = a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (bx^2 + 2x + c) = c \\ f(0) = a \end{array} \right. \Longrightarrow a = c$$

☛ En $x = 1$ es $f(x) = bx^2 + 2x + c \Longrightarrow f'(x) = 2bx + 2$, si $x = 1$ es un extremo relativo $f'(1) = 0 \Longrightarrow 2b + 2 = 0 \Longrightarrow b = -1$

☛ En $x = -1$ es $f(x) = \dfrac{a}{1-x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2}$, si $f'(-1) = -1 \Longrightarrow \dfrac{a}{4} = -1 \Longrightarrow a = -4$

☛ Luego $a = -4$, $b = -1$ y $c = -4$.

Para comprobar de qué tipo de extremo hay en $x = 1$ recurrimos a la segunda derivada en esa rama $f''(x) = 2b = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 1$ es un máximo.

b) Si $a = 1$, $b = -2$, $c = 3 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

☛ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$

☛ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (-2x^2 + 2x + 3) = -\infty$

c) Si $a = 1$, $b = -2$, $c = 3 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

$$\int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 3)\, dx = \left. \frac{-2x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_1^2 = \frac{4}{3}$$