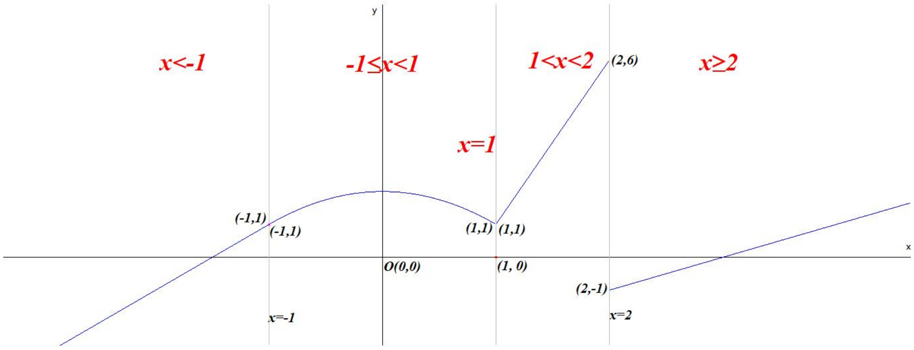
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2023

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2+2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ 5x-4 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x-3 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 + bx - a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (2x^2 + bx - a) = 2 + b - a$$

$$2a - b + 1 = 2 + b - a \Longrightarrow 3a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \;\; f'(1^+) = 4 + b \Longrightarrow 4a - b = 4 + b \Longrightarrow 4a - 2b = 4$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 4a - 2b = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2a}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x + a & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{bx - 1}{3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x - 2a}{2} = \dfrac{-1 - 2a}{2} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (2x + a) = -2 + a \end{cases} \Longrightarrow \frac{-1 - 2a}{2} = -2 + a \Longrightarrow a = \frac{3}{4}$$

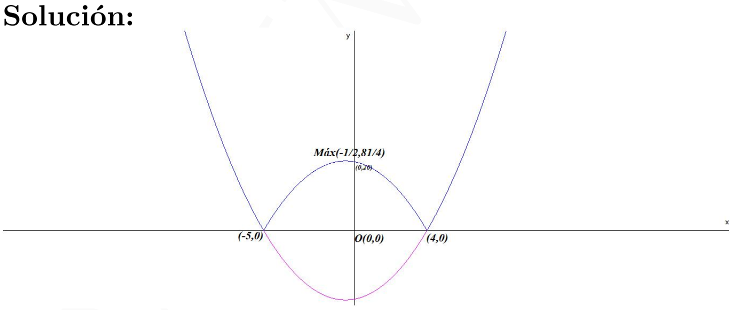
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{bx - 1}{3} = \dfrac{b - 1}{3} \end{cases} \Longrightarrow 2 + a = \frac{b - 1}{3} \Longrightarrow 3a - b = -7$$

$$\begin{cases} a = 3/4 \\ 3a - b = -7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3/4 \\ b = 37/4 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + x - 20|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + x - 20 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$:

x	y
0	-20
-5	0
4	0
$-1/2$	$-81/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{81}{4}\right)$.
La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + x - 20 & \text{si} & x \le -5 \\ -(x^2 + x - 20) & \text{si} & -5 < x \le 4 \\ x^2 + x - 20 & \text{si} & 4 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^-} (x^2 + x - 20) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5^+} (-x^2 - x + 20) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

y f es continua en $x = 4$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^-} (-x^2 - x + 20) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 4^+} (x^2 + x - 20) = 0$$

$$f(4) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 1 & \text{si} & x \le -5 \\ -2x - 1 & \text{si} & -5 < x \le 4 \\ 2x + 1 & \text{si} & 4 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -5$: $f'(-5^-) = -9$ y $f'(-5^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -5$.
Derivabilidad en $x = 4$: $f'(4^-) = -9$ y $f'(4^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 4$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-5, 4\}$.

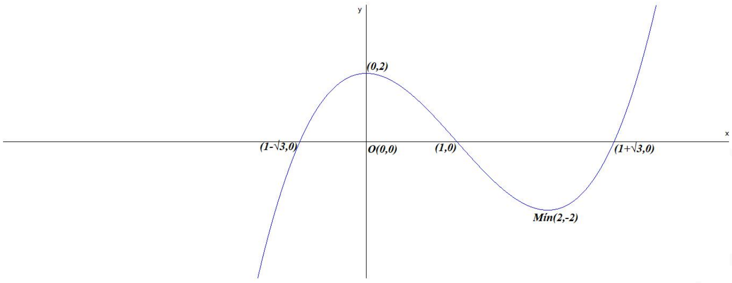
Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 2bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto

$(2, -2)$. Decidir de que extremo se trata.
Solución:

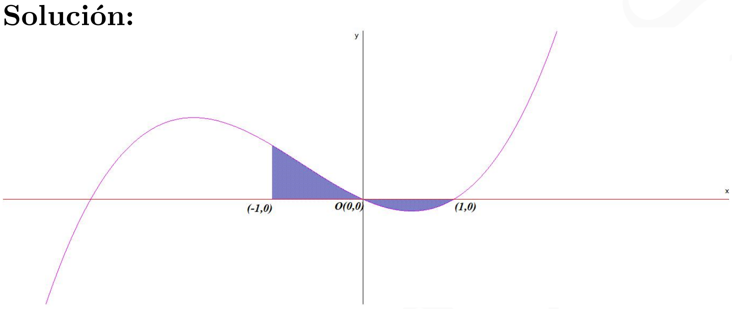
$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4ax + 2b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(2) = -2 \Longrightarrow 8 - 8a + 4b + c = -2 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 8a + 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3/2 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{array} \right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f''(2) = 6 > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.



Problema 6 Dada la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:



$$x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = -3, \ \ x = 1 \text{ y } x = 0$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 + 2x^2 - 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = \frac{23}{12}, \ \ S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{7}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{23}{12} + \frac{7}{12} = \frac{5}{2} \simeq 2,5 \ u^2$$