Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un $m\,\%$ de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un $6\,\%$ de beneficios.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.

b) Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del $4\,\%$? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

Solución:

a) Sea x la cantidad invertida en la primera empresa e y la cantidad invertida en la segunda.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ \dfrac{m}{100}x+0,06y=1280 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ mx+6y=128000 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ m & 6 & 128000 \end{array}\right)$ con $|A|=6-m=0\Longrightarrow m=6$

☛ Si $m\neq 6\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=2=$Rango$(A)=$nº de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
La respuesta es afirmativa:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ 4x+6y=128000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=22000 \\ 2x+3y=64000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2000€ \\ y=20000€ \end{array}\right.$$

☛ Si $m=6$: $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 6 & 6 & 128000 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-6F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0 & -4000 \end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema incompatible (no tiene solución)

Problema 2 *(2,5 puntos)*Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

a) $|A| = x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ o $x = 3 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b) Si $x = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro a.

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $a = -2$.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo. El sistema no puede ser incompatible, siempre tendrá la solución trivial $x = y = z = 0$. Luego se trata de sistemas siempre compatibles y la discusión será sobre si es determinado (solución única, la trivial) o indeterminado (infinitas soluciones además de la trivial)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -2(a^2 - 11a - 26) = 0 \Longrightarrow a = -2 \;\; a = 13$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-2, 13\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$ número de incógnitas, el sistema será compatible determinado y su única solución es la trivial.
- ☛ Si $a = -2$ o $a = 13 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) <$ número de incógnitas, el sistema será compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = -2$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Una matriz cuadrada A se dice *idempotentes* si $A^2 = A$.

a) Estudia si hay matrices *idempotentes* 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b.

b) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022}.

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & b+2 \\ a(b+2) & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a+4=2 \Longrightarrow a=-2 \\ b+2=1 \Longrightarrow b=-1 \\ a(b+2)=a \Longrightarrow -2(-1+2)=-2 \\ a+b^2=b \Longrightarrow -2+1=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$$

La matriz A es *idempotente* si $a = -2$ y $b = -1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+4 & 3b \\ 3a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ab+4=2 \Longrightarrow 0+4=2 \text{ imposible} \\ 3b=b \Longrightarrow b=0 \\ 3a=a \Longrightarrow a=0 \\ ab+1=1 \Longrightarrow 0+1=1 \end{cases} \Longrightarrow$$

La matriz B no puede ser *idempotente* sea cual sea el valor de a y b.

b) $A^2 = A$, $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$, $A^4 = A^3A = AA = A^2 = A, \ldots, A^n = A$ luego $A^{2022} = A$