Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Dado el sistema lineal: $\left\{\begin{array}{r} (m+1)x = m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8 \end{array}\right.$. Se pide:

a) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado a)

Solución:

a) $\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

$|A| = m(m+1) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = -1$

Si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow AX = B$ tiene solución única: $X = A^{-1}B$

b) Si $m = 0 \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado

$\left\{\begin{array}{r} 2x+y=-3 \\ 3x-2y=-8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right.$

Si $m = -1 \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema incompatible

c) Si $m = 1 : A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

   1.1 $B + 2CA$.

   2.2 $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC.

   3.3 CAB.

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$$

   Siendo C^T la matriz traspuesta de C.

Solución:

a) 1.1 $\underset{2\times 1}{B}+2\underset{1\times 2}{C}\cdot\underset{2\times 2}{A}=\underset{2\times 1}{B}+2\underset{1\times 2}{CA}$ no se pueden sumar matrices de distinta dimensión.

   2.2 $\underset{2\times 2}{A}-(\underset{2\times 1}{B}\cdot\underset{1\times 2}{C})^T=\underset{2\times 2}{A}-\underset{2\times 2}{(BC)^T}$ si se pueden restar matrices de la misma dimensión.

$$A-(BC)^T=\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&-12\\8&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&12\\-6&16\end{pmatrix}$$

   3.3 $\underset{1\times 2}{C}\cdot\underset{2\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 1}{B}=\underset{1\times 1}{CAB}$ si se puede.

$$CAB=\begin{pmatrix}-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-24\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\end{pmatrix}$$

b) $\frac{1}{5}(B+AX)=C^T\Longrightarrow B+AX=5C^T\Longrightarrow X=A^{-1}(5C^T-B)=$
$\begin{pmatrix}6&0\\2&4\end{pmatrix}^{-1}\left[5\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1/6&0\\-1/12&1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7/2\end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$

Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $AX+C=B^t-2X$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

Justificar la respuesta.

Solución:

$AX + C = B^t - 2X \Longrightarrow AX + 2X = B^t - C \Longrightarrow (A + 2I)X = B^t - C \Longrightarrow X = (A + 2I)^{-1}(B^t - C) =$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando un total de 20€. Al comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5€. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2€, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

b) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el precio del helado, y el precio del granizado y z el precio de la horchata.

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ 0,5x + 0,5y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 20 \\ x + z = 5 \\ x + y = 4 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 20 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 - y = 3€ \\ y = -(1 - z) = 1€ \\ z = 2€ \end{array}\right.$$

sistema compatible determinado. Solución única.