# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

**Noviembre 2022**

**Problema 1** *(2,5 puntos)*Se pide:

a) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcular el valor de $m$ para que la ecuación matricial $XA = B$ tenga solución única.

c) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

d) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Solución:**

a) $|A| = 8 - 7m = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{8}{7}$

Si $m \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{8}{7}\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow XA = B$ tiene solución única: $X = BA^{-1}$

b) Si $m = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

c) Se trata de un sistema homogéneo por lo que es siempre compatible y $|B| = 0$ luego es un sistema compatible indeterminado, $F_3 = F_2 - F_1$ por lo que se puede eliminar la fila tercera y queda el sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

**Problema 2** *(2,5 puntos)*Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real $a$

$$\left\{\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de $a$.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

**Solución:**

a) $\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$ y $|A| = 2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 1$

- ☛ Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $=$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

sistema incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c} F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \right] =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2z = 1 \Longrightarrow z = \dfrac{1}{2} \\ \\ -y + \dfrac{3}{2} = -2 \Longrightarrow y = \dfrac{7}{2} \\ \\ x + \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2} = 1 \Longrightarrow x = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ \\ y = \dfrac{7}{2} \\ \\ z = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

**Problema 3** *(2,5 puntos)*Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde $a$ es un parámetro real.

a) Calcule para qué valor de $a$ las dos matrices conmutan, es decir, para qué valor de $a$ se cumple que $AB = BA$. Compruebe que para este valor de $a$ se satisface que $AB = 2I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden dos.

b) Para el valor de $a$ encontrado en el apartado anterior, calcule las matrices inversas de las matrices $A$ y $B$. Puede aplicar la relación $AB = 2I$.

**Solución:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

b) $AB = 2I \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}2I \Longrightarrow B = 2A^{-1}I = 2A^{-1} \Longrightarrow$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Análogamente:

$AB = 2I \Longrightarrow ABB^{-1} = 2IB^{-1} \Longrightarrow A = 2B^{-1} \Longrightarrow$

$B^{-1} = \dfrac{1}{2}A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Problema 4** *(2,5 puntos)*Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

**Solución:**

Sean $x$ alquiler del primer local, $y$ alquiler del segundo local y $z$ alquiler del tercer local.

☛ $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ 0,05x + 0,10y + 0,2z = 132 \\ x = 2(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1650 \\ x + 2y + 4z = 2640 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1100 \\ y = 330 \\ z = 220 \end{array}\right.$

☛ El primer local se alquila por 1100€, el segundo por 330€ y el tercero por 220€.