

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2022

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -7 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -m & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ m & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
b) Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & -m & 2 \\ m & -5 & 0 \end{vmatrix} = m^2 + 14m - 15 = 0 \implies m = -15, \quad m = 1$$

Si $m = -15$ o $m = 1 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq -15$ y $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -4/15 \\ 0 & 0 & -1/5 \\ 1 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A; \quad A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$$

$$\text{Luego } A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ impar} \\ I & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \implies A^{1000} = I$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \implies \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a+b \\ c & -c+d \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} a-c = a \implies c = 0 \\ b-d = -a+b \implies a = d \\ c = c = 0 \\ d = -c+d \implies c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego } X = \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$