Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Diciembre 2022

Problema 1 Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = 1$.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 2(a^2 - 3a - 4) = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 4$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = $ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 + F_1 \\ 4F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

- Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 1$:

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -8 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 16z = -8 \Longrightarrow z = -1/2 \\ -9y - 5 = -5 \Longrightarrow y = 0 \\ 4x + 0 + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio neto de 350€, y por cada frisona uno de 500€. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

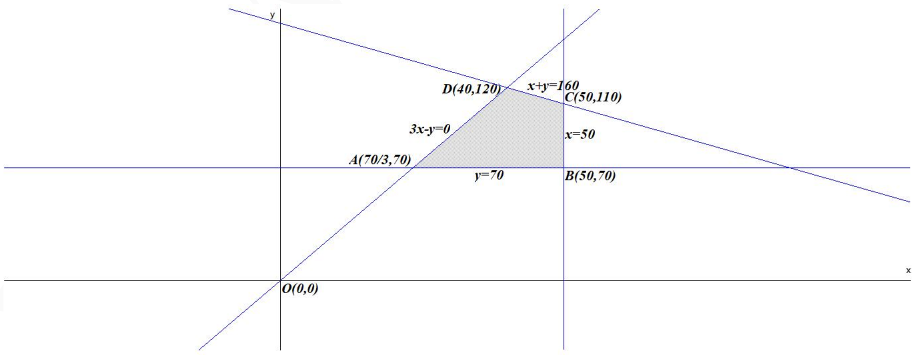
d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:
Sea x el nº de vacas pardas e y el nº de vacas frisonas.

a) $f(x,y) = 350x + 500y$ sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} x + y \le 160 \\ x \le 50 \\ y \ge 70 \\ x \ge \dfrac{y}{3} \\ x \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y \le 160 \\ x \le 50 \\ y \ge 70 \\ 3x - y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{array}\right.$$

b) Representación:



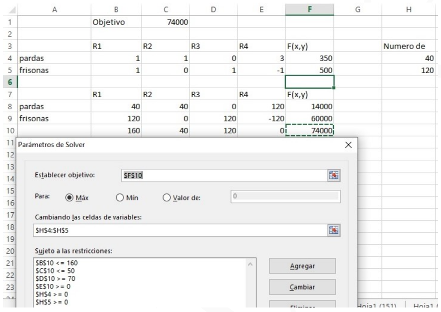
Los vértices a estudiar serán:

$$A(70/3, 70), \quad B(50, 70), \quad C(50, 110) \text{ y } C(40, 120)$$

c) Sustituyendo en la función objetivo $f(x, y) = 350x + 500y$:

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(70/3, 70) = 43166,67 \\ f(50, 70) = 52500 \\ f(50, 110) = 72500 \\ f(40, 120) = 74000 \end{cases} \implies$$



debe comprar 40 vacas pardas y 120 frisonas para obtener el máximo beneficio.

d) El beneficio máximo es de 74000€.