Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2023

Problema 1 *(2,5 puntos)*Los puntos $A = (2, 0, 0)$, $B = (-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r : \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

b) Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

c) Calcule el área del triángulo ABC.

Solución:

$$r : \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 11 - \dfrac{4}{3}\lambda \end{cases} \Longrightarrow$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \left(1, 0, -\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{3}(3, 0, -4) \\ P_r(0, 0, 11) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 11 - 4\lambda \end{cases}$$

a) Calculamos el plano $\pi \perp r$ tal que $A \in r$:
$\pi : 3x - 4z + \lambda = 0 \overset{A\in\pi}{\Longrightarrow} 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -6 \Longrightarrow \pi : 3x - 4z - 6 = 0$
El punto C es el punto de corte de π con r:
$\pi : 9\lambda - 4(11 - 4\lambda) - 6 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow C(6, 0, 3)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1, 12, 4) - (2, 0, 0) = (-3, 12, 4)$ y
$\overrightarrow{AC} = (6, 0, 3) - (2, 0, 0) = (4, 0, 3)$
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-12 + 0 + 12}{\sqrt{169}\sqrt{25}} = \frac{0}{65} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

c) $S = \dfrac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \dfrac{1}{2}|(36, 25, -48)| = \dfrac{65}{2}\ u^2$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Los puntos $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice esta contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta r.

b) Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_r = B = (1,1,1) \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

b) $C \in r \Longrightarrow C(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$
$\overrightarrow{AB} = (1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$
$S_t = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(2\lambda, -\lambda, -5\lambda)| = \frac{1}{2}|\lambda(2,-1,-5)| = \frac{1}{2}|\lambda|\sqrt{30} =$
$3\sqrt{30} \Longrightarrow |\lambda| = 6 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \Longrightarrow C_1(13,-5,7) \\ \lambda = -6 \Longrightarrow C_1(-11,7,-5) \end{cases}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Considera la recta $r: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

a) Estudie la posición relativa de recta y plano.

b) Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución:
$r: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = -3+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,2,1) \\ P_r(-1,-3,0) \end{cases}$

a) Sustituimos r en π:

$$(-1-\lambda) - 2(-3+2\lambda) - \lambda = -1 \Longrightarrow \lambda = 1$$

La recta r y el plano π se cortan en un punto.

b) El punto de corte de r con π es $H(-2,-1,1)$. Y el ángulo

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|(-1,2,1)\cdot(1,-2,-1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{6}{6} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases},$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

a) Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

b) Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r.

Solución:

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 0) \\ P_r(0, 0, a) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0, 1, -5) \\ P_s(-1, 0, 0) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, 0, a)$ $\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \Longrightarrow$

$|A| = 2a + 5 = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{2}$

- ☛ Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.
- ☛ Si $a = -\dfrac{5}{2}$:
  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ (las dos rectas están en el mismo plano) y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Longrightarrow$ la matriz formada por los dos vectores $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ tiene rango 2 y, por tanto, las rectas r y s se cortan.

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (0, 1, -5) \\ P_s(-1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$\pi : 5x + 10y + 2z + 5 = 0$