Examen de Matemáticas II (Ordinaria-Coincidente 2023)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a.

b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a = 0$.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = 5a^2 + 4a - 9 = 0 \Longrightarrow a = -\dfrac{9}{5}$ y $a = 1$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{9}{5}, 1\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- ☛ Si $a = -\dfrac{9}{5}$ o $a = 1$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $|A| = -9 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/9 & 1 \\ 2/3 & 1/9 & 0 \\ 1/3 & -1/9 & 0 \end{pmatrix}$

c) Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre tiene solución. En nuestro caso $|A| = 0$ para $a = 1$ y será un sistema compatible indeterminado. Tendremos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{9}{5}\lambda \\ \\ y = \dfrac{13}{5}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ con mínima pendiente.

b) (1,25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$.

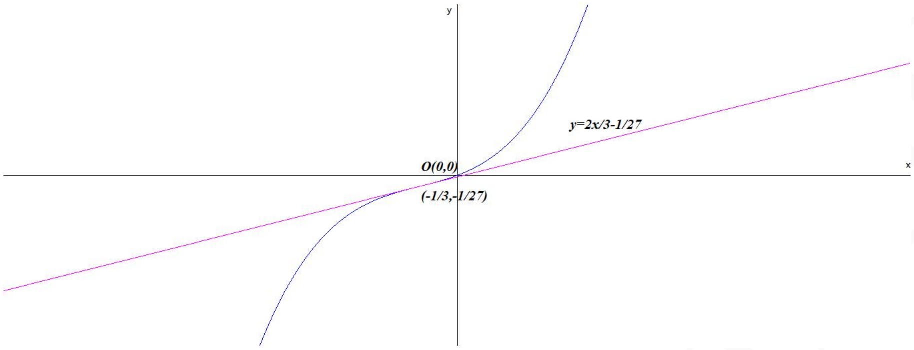
Solución:

a) Llamamos $g(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, g es la función de pendientes de f:
$g'(x) = 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$g''(x) = 6 \Longrightarrow g''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 > 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{3}$ es un mínimo.

Tenemos que $m = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ y $b = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{27}$

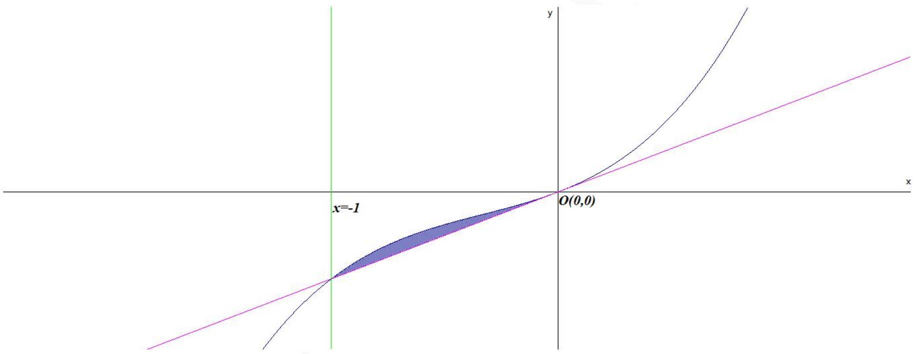
$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y + \frac{7}{27} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{27}$



b) Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = x \Longrightarrow x^3 + x^2 + x = x \Longrightarrow x^3 + x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -1$. El recinto de integración será $S_1 : [-1, 0]$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (f(x) - x)\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12} \simeq 0,0833\ u^2$$



Problema 3 (2,5 puntos) Sean los planos $\pi_1 : y = x$, $\pi_2 : y = x + 1$, $\pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.

a) (0,5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.

b) (0,5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.

c) (0,5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto $(1, 0, 2)$.

d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

Solución:

$\pi_1 : x - y = 0$, $\pi_2 : x - y + 1 = 0$, $\pi_3 : z + 1 = 0$ y $\pi_4 : z - 1 = 0$

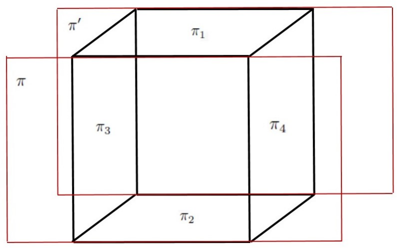
a) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{\cdot}{\cdot} \neq \dfrac{0}{-1} \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

π_3 con $\pi_4 \Longrightarrow \dfrac{\cdot}{\cdot} = \dfrac{\cdot}{\cdot} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1} \Longrightarrow \pi_3 \parallel \pi_4$

b) $\overrightarrow{u_{\pi_1}} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1,-1,0)$
$\overrightarrow{u_{\pi_3}} = \overrightarrow{u_{\pi_4}} = (0,0,1)$
$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_3}} = 0+0+0 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_3}} \Longrightarrow \pi_1$ y $\pi_2 \perp \pi_3$ y a π_4

c) $$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_3}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1,1,0) \\ \\ P_r(1,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{array} \right.$$

d) Tenemos:



$\overrightarrow{u_{\pi}} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_3}} = -(1,1,0)$
$\pi : x+y+\mu = 0$, podemos poner $\mu = 0 \Longrightarrow$
$\pi : x+y = 0$ y $\pi' : x+y+\lambda = 0$ y el volumen encerrado por este paralelepípedo sería:

$$V = d(\pi_1,\pi_2)\cdot d(\pi_3,\pi_4)\cdot d(\pi,\pi') = 1$$

- Calculamos $d(\pi_1,\pi_2)$ para ello cogemos un punto de $\pi_1 \Longrightarrow P(1,1,0)$ y tenemos: $d(\pi_1,\pi_2) = d(P,\pi_2) = \dfrac{|1-1+1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Calculamos $d(\pi_3,\pi_4)$ para ello cogemos un punto de $\pi_3 \Longrightarrow Q(0,0,-1)$ y tenemos: $d(\pi_3,\pi_4) = d(Q,\pi_4) = \dfrac{|-1-1|}{\sqrt{1}} = 2$
- Calculamos $d(\pi,\pi')$ para ello cogemos un punto de $\pi \Longrightarrow H(1,-1,0)$ y tenemos: $d(\pi,\pi') = d(H,\pi') = \dfrac{|1-1+\lambda|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$

Tenemos: $1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |\lambda| = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$
Habría dos soluciones para el plano $\pi : x+y = 0$ elegido:

- Si $\lambda = -1 \Longrightarrow \pi' : x+y-1 = 0$
- Si $\lambda = 1 \Longrightarrow \pi' : x+y+1 = 0$

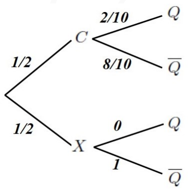
Problema 4 (2,5 puntos) En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) (1,25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.

b) (1,25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20 %. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

Solución:

a) Sean C cara, X cruz, Q crítico y $\overline{Q}$ no crítico.
$p = P(Q) = P(Q|C)P(C) + P(Q|X)P(X) = \dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{2} + 0\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10} = 0,1$
Tenemos $n = 5 \Longrightarrow B(5; 0,1)$
$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - [P(X = 4) + P(X = 5)] =$
$1 - \left[\binom{5}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^1 + \binom{5}{5}\cdot 0,1^5\cdot 0,9^0\right] = 0,99954$



b) $p = 0,2$, $n = 100 > 10$, $np = 20 > 5$ y $nq = 80 > 5 \Longrightarrow$
$B(100; 0,2) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(20, 4)$
$P(15 \le X \le 25) = P\left(\dfrac{14,5-20}{4} \le Z \le \dfrac{25,5-20}{4}\right) = P(-1,38 \le Z \le 1,38) =$
$P(Z \le 1,38) - P(Z \le -1,38) = 2P(Z \le 1,38) - 1 = 2\cdot 0,9162 - 1 = 0,8324$

Examen de Matemáticas II (Ordinaria-Coincidente 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.
Solución:
Sean x gramos de grasas, y gramos de carbohidratos y z gramos de proteínas.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=500\\ 9x+4y+4z=2500\\ y=40+2z\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=500\\ 9x+4y+4z=2500\\ y-2z=40\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=100 \text{ gramos}\\ y=280 \text{ gramos}\\ z=120 \text{ gramos}\end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500\\ 9 & 4 & 4 & 2500\\ 0 & 1 & -2 & 40\end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-9F_1\\ F_3\end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500\\ 0 & -5 & -5 & -2000\\ 0 & 1 & -2 & 40\end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ 5F_3+F_2\end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500\\ 0 & -5 & -5 & -2000\\ 0 & 0 & -15 & -1800\end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -15z=-1800 \Longrightarrow z=120\\ -5y-600=-2000 \Longrightarrow y=280\\ x+280+120=500 \Longrightarrow x=100\end{array}\right.$$

La solución sería:

$$\left\{\begin{array}{l} 100\cdot 9 = 900 \text{ Kcal de las grasas}\\ 280\cdot 4 = 1120 \text{ Kcal de los carbohidratos}\\ 120\cdot 4 = 480 \text{ Kcal de las proteínas}\end{array}\right.$$

Problema 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 2|}{x^2 + 2x + 1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de f.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

Solución:

$h(x) = x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
	$+$	$-$	$+$
$h(x)$	$+$	$+$	$+$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{x^2 + 2x + 1} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{-h(x)}{x^2 + 2x + 1} & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{h(x)}{x^2 + 2x + 1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Luego $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Asíntotas:

- ☛ Verticales en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x - 1}{2x + 2} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty;$$

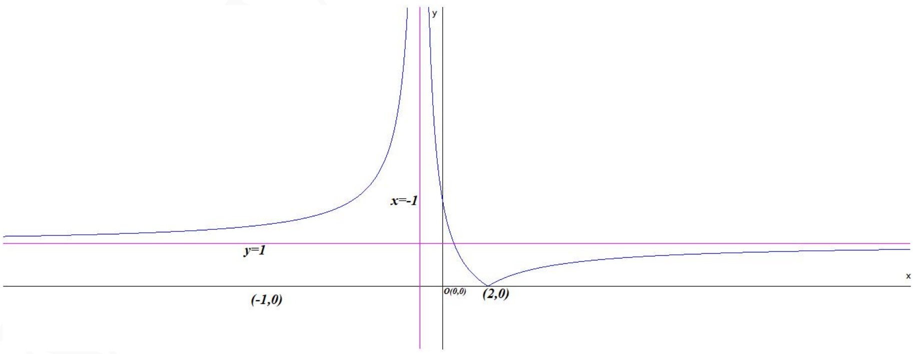
$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{-2x + 1}{2x + 2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty;$$

- ☛ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1} = 1$$

- ☛ Oblicuas no hay por haber horizontales.



b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < -1 \\ -\dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ \dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

La derivada no se anula nunca lo que nos afirma que no hay extremos por este método de cálculo. La función será creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el $(-1, 2)$, con un mínimo relativo en el punto$(2, 0)$.

Problema 3 (2,5 puntos) Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi \equiv x + 2y + 2z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv 2x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, -1) \\ P_r(1, 0, -2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, 2); \quad \overrightarrow{u_{\pi'}} = (2, 2, 1)$$

a) $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{2} \neq \dfrac{2}{1} \Longrightarrow \pi$ y π' se cortan.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}}|}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_{\pi'}}|} = \frac{|2 + 4 + 2|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{8}{9} \Longrightarrow \alpha = 27^\circ 15' 58''$$

b) Sustituimos r en π: $(1 + 3\lambda) + 2\lambda + 2(-2 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{4}{3}$ r y π se cortan en el punto:$\left(5, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{10}{3}\right)$

c) $P \in r \Longrightarrow P\,(1 + 3\lambda, \lambda, -2 - \lambda)$ y tenemos: $d(P, \pi) = d(P, \pi') \Longrightarrow$

$$\frac{|(1 + 3\lambda) + 2\lambda + 2(-2 - \lambda) - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|2(1 + 3\lambda) + 2\lambda + (-2 - \lambda) + 4|}{\sqrt{9}} \Longrightarrow$$

$$|3\lambda - 4| = |7\lambda + 4| \Longrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 4 = 7\lambda + 4 \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow Q_1(-5, -2, 0) \\ 3\lambda - 4 = -7\lambda - 4 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow Q_2(1, 0, -2) \end{cases}$$

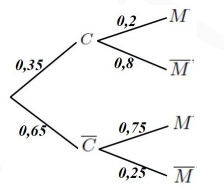
Problema 4 (2,5 puntos) Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75 % de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80 % de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.

b) (1,25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

Solución:
Sean C compran, $\overline{C}$ no compran, M menos de 50 años y $\overline{M}$ no es menor de 50 años.

$$P(C) = \frac{7}{20} = 0,35;\ \ P(M|\overline{C}) = 0,75;\ \ P(\overline{M}|C) = 0,8$$



a) $P(M) = P(M|C)P(C) + P(M|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$0,2 \cdot 0,35 + 0,75 \cdot 0,65 = 0,5575$

b) $P(\overline{C}|\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M}|\overline{C})P(\overline{C})}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,25 \cdot 0,65}{1 - 0,5575} = 0,3672$