Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2023)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

Sean x el número camiones tipo A, y el número camiones tipo B y z el número camiones tipo C.

$$\left\{\begin{array}{c} 14x + 24y + 28z = 302 \\ 1 + x = y + z \\ 0,1 \cdot 24y = \dfrac{1}{7} \cdot 28z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 7x + 12y + 14z = 151 \\ x - y - z = -1 \\ 3y - 5z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \text{ tipo } A \\ y = 5 \text{ tipo } B \\ z = 3 \text{ tipo } C \end{array}\right.$$

Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} 7 \cdot 14 = 98 \text{ Tm} \\ 5 \cdot 24 = 120 \text{ Tm} \\ 3 \cdot 28 = 84 \text{ Tm} \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0,25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0,75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1,5 punto) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución:

a) $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2-1)^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x) \Longrightarrow f$ es par, simétrica respecto al eje de ordenadas OY

b) $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

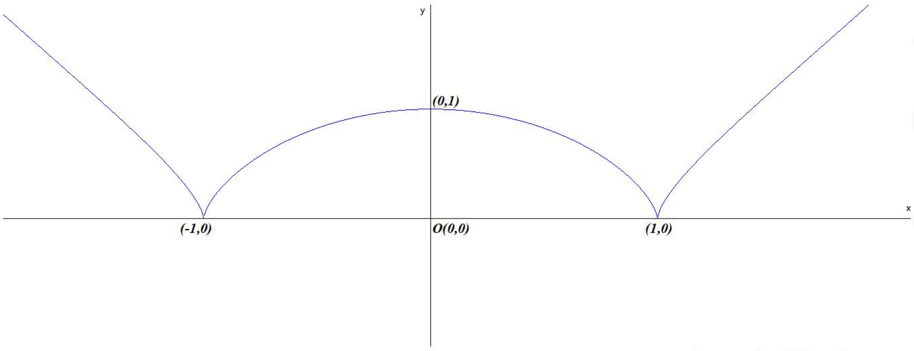
- ☛ $f'(1^-) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{0^-}} = -\infty$
- ☛ $f'(1^+) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{0^+}} = +\infty$
- ☛ $f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 1$. (Tampoco lo es en $x = -1$)

Otra forma de justificarlo:
El $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Longrightarrow -1 \notin \text{Dom}(f') \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = -1$.

c) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y el denominador se anula en $x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Hay un máximo relativo en el punto (0,1). Los puntos (-1,0) y (1,0) son mínimos absolutos ya que $f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.



Problema 3 *(2,5 puntos)* Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0,75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

c) (0,5 puntos) Calcular el perímetro de triángulo T.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -3)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, -1, 1)$
Para que formen un triángulo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser proporcionales $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (-1, 4, -4) = k(1, 3, -3)$ y $\nexists k \in \mathbb{R}$ que verifique esa igualdad, luego los tres puntos no están alineados y, por tanto, forman un triángulo.
El plano sería: $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 3, -3) \\ A(1, -2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : y + z - 1 = 0$$

b) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4) \\ P_r = A(1, -2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{array} \right.$
Sustituyendo en $z = 1$ tenemos:
$(1 - \lambda) \cdot 0 + (-2 + 4\lambda) \cdot 0 + (3 - 4\lambda) = 1 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$ sustituyendo en r el punto de corte es: $P\left(\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{33}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{19}$ y $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6}$
El perímetro será: $\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} = 12,55\ u$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0,3$.

a) (0,75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0,5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0,75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C|A) = 0,5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A}|D) = 0,2$ y $P(D|A) = 0,5$, calcule $P(D)$.

Solución:

a) Como A y B son independientes tenemos $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$

b) $P(C|A) = 0,5 = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(C \cap A) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$
$P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(C \cap A) = 0,3 - 0,15 = 0,15$

c) $P(D|A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0,5 \Longrightarrow P(D \cap A) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$

$$P(\overline{A}|D) = \frac{P(\overline{A} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D) - P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D) - 0,15}{P(D)} = 0,2 \Longrightarrow$$
$$P(D) - 0,15 = 0,2P(D) \Longrightarrow P(D) = \frac{0,15}{0,8} = 0,1875$$

Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$, se pide Se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $a = 3$

c) (0,75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -a^2 - 2a + 15 = 0 \Longrightarrow a = -5$ y $a = 3$

- ☛ Si $a \in R - \{-5, 3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)

☛ Si $a=-5$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 4 & -10 & 1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

☛ Si $a=3$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 4 & 6 & 1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)}$$

b) Si $a=3$:
$$\left\{\begin{array}{l} x+y=0\\ 2y+z=3\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=3+2\lambda\end{array}\right.$$

c) Si $a=5$:
$$\left\{\begin{array}{l} 6x+4y=0\\ 4y+z=3\\ 4x+10y+z=3\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=0\\ z=3\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como
$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} & x\le -1\\ & & \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} & x>-1\end{array}\right., \text{ se pide:}$$

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$

b) (0,75 puntos) Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$

c) (1 punto) Calcular la siguiente integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) ☛ Continuidad en $x=-1$:
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}\dfrac{x^2}{2+x^2}=\dfrac{1}{3}\\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}\dfrac{2x^2}{3-3x}=\dfrac{1}{3}\\ f(-1)=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Longrightarrow$$
$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=f(-1)\Longrightarrow f \text{ es continua en } x=-1$$

☛ En la rama $x\le -1\Longrightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2+x^2}$ el denominador no se anula para ningún valor de esta rama y, por tanto, es continua en toda la rama.

- ☛ En la rama $x > -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2x^2}{3-3x}$ el denominador se anula para $x = 1$ (valor que está en la rama), donde hay una asíntota vertical y habrá una discontinuidad. En ese punto la función tiene un salto infinito. Por tanto, la función es continua en toda la rama menos en ese punto.
- ☛ En conclusión, f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = [1^\infty] = e^\lambda$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}(2x^2-1)\left(\frac{x^2}{2+x^2}-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+2}{x^2} = -4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = e^{-4}$$

c) $$F(x) = \int \frac{2x^2}{3-3x}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{x^2}{1-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} (\quad x^2) : (-x+1) = -x-1+\dfrac{1}{-x+1} \\ \underline{-x^2+x} \\ \qquad\quad x \\ \quad\ \underline{-x+1} \\ \qquad\quad 1 \end{array}\right] =$$

$$\frac{2}{3}\int\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{2}{3}\left(-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|\right)+C$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0)-F(-1) = \frac{2\ln 2}{3}-\frac{1}{3} \simeq 0,1288$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$, el plano $\pi \equiv x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0,75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A respecto a la recta r.

Solución:

a)

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-2) \\ P_r(1,0,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{array}\right.$$

Sustituyendo en π tenemos:

$$(1+2\lambda)+0\cdot\lambda-(-1-2\lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = 0$$

Sustituyendo en r:

$$P\,(1,0,-1)$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_t = A(1, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculamos A' intersección de t con π. Será la proyección de A sobre π. Sustituyendo t en π tenemos:

$$(1 + \lambda) + 0 - (1 - \lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo en t tenemos: $A'(2, 1, 0)$

c) Seguimos los siguientes pasos:

- ☛ Calculamos $\pi' \perp r$ tal que $A \in \pi'$, $u_{\pi'} = \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -2)$:
$\pi' : 2x + y - 2z + \lambda = 0$, sustituyendo A tenemos $1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow \pi' : 2x + y - 2z - 1 = 0$

- ☛ Calculamos el punto de corte P' de r con π':

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

Sustituyendo en r tenemos $P'\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

- ☛ $\dfrac{A + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - A = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

Problema 4 *(2,5 puntos)* La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25,75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0,5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm están el 18 % de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Solución:

$$N(175; 25,75)$$

a) $P(X \geq 160) = \left(Z \geq \dfrac{160 - 175}{25,75}\right) = P(Z \geq -0,58) = P(Z \leq 0,58) = 0,7190 \Longrightarrow 71,90\,\%$

b) $P(t \leq X \leq 175) = P\left(\dfrac{t - 175}{25,75} \leq Z \leq \dfrac{175 - 175}{25,75}\right) = P\left(\dfrac{t - 175}{25,75} \leq Z \leq 0\right) =$
$P(Z \leq 0) - P\left(Z \leq \dfrac{t - 175}{25,75}\right) = 0,5 - P\left(Z \leq \dfrac{t - 175}{25,75}\right) = 0,18$

$P\left(Z \leq \dfrac{t-175}{25,75}\right) = 0,32 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{t-175}{25,75}\right) = 1-0,32 = 0,68 \Longrightarrow$
$-\dfrac{t-175}{25,75} = 0,465 \Longrightarrow t = 163,03$ mm

c) $B(10;p)$ donde $p = P(X \leq 150) = \left(Z \leq \dfrac{150-175}{25,75}\right) = P(Z \leq -0,97) =$
$1 - P(Z \leq 0,97) = 1 - 0,8340 = 0,166$
Luego $B(10;0,166)$, $p = 0,166$ y $q = 0,834$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,166^0 \cdot 0,834^{10} = 1 - 0,1628 =$
$0,8372$