Examen de Matemáticas II (Modelo 2023)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* En la liga de fútbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga.

Solución:

Sean x el número de defensas, y el número de centrocampistas y z el número de delanteros.
Hay un total de $20 \cdot 25 - 20 \cdot 3 = 440$ jugadores no porteros.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=440 \\ \dfrac{y}{2}+2z-25=x \\ \dfrac{x}{3}=y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=440 \\ 2x-y-4z=-50 \\ x-3y+3z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=210 \text{ defensas} \\ y=150 \text{ centrocampistas} \\ z=80 \text{ delanteros} \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{xe-e}{e^x-e} & \text{si} & x<1 \\ & & \\ \dfrac{1}{4x-3} & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x)=(e^x-e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\,dx$

Solución:

a)
- ☛ La función es continua para cualquier valor $x \neq 1$, son composición de funciones continuas y los denominadores no se anulan nunca.
  Continuidad en $x=1$:
  $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{xe-e}{e^x-e} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{e}{e^x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{4x-3} = 1 \\ f(1)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
  $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow f$ es continua en $x=1 \Longrightarrow$
  f es continua en $\mathbb{R}$.
- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: No hay, los denominadores no se anulan en en ninguna de las dos ramas.
  - Horizontales:

- Si $x < 1$:
  $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{xe-e}{e^x-e} = \left[\dfrac{-\infty}{-e}\right] = \infty$
  No hay asíntota horizontal por la izquierda.
- Si $x \geq 1$:
  $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{1}{4x-3} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$
  Hay una asíntota horizontal por la derecha $y = 0$.

- Oblicuas:
  - Si $x < 1$:
    $m = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{xe-e}{xe^x-xe} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{e}{xe^x+e^x-e} = -1$
    $n = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\dfrac{xe-e}{e^x-e}+x\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\dfrac{xe-e+xe^x-ex}{e^x-e}\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\dfrac{-e+xe^x}{e^x-e}\right) = 1$
    Hay una asíntota oblicua por la izquierda en $y = -x+1$.
  - Si $x \geq 1$: no puede haber oblicua por haber horizontal.

b) $g(x) = (e^x-e)f(x)$ en $x = 0$ está en la rama $x < 1$ y la función $f(x) = \dfrac{xe-e}{e^x-e} \Longrightarrow g(x) = (e^x-e)\dfrac{xe-e}{e^x-e} = xe-e \Longrightarrow g'(x) = e \Longrightarrow g'(0) = e$

c) $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}}\,dx = \int (4x-3)^{-1/2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4x-3 \\ dt = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array}\right] =$
$\displaystyle\int t^{-1/2}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{t^{1/2}}{2} + C = \frac{\sqrt{4x-3}}{2} + C$
$\displaystyle\int_1^5 \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = F(5)-F(1) = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1,1,6)$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

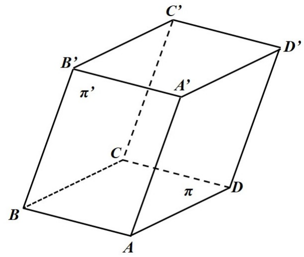
c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

Solución:

a) Calculamos el plano π'

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,2,0) \\ \overrightarrow{AA'} = (0,0,5) \\ A(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$10(x-1) = 0 \Longrightarrow \pi' : x - 1 = 0$



b) Como la base es un cuadrado $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{0+4+0} = 2$
$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{AB}$ con módulo 2:
$\overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (6,0,8)$, como tiene que tener módulo 2 quedaría
$\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{\sqrt{6^2+0+8^2}}(6,0,8) = \left(\dfrac{6}{5}, 0, \dfrac{8}{5}\right)$
Luego $D = A + \overrightarrow{AD} = (1,1,1) + \left(\dfrac{6}{5}, 0, \dfrac{8}{5}\right) = \left(\dfrac{11}{5}, 1, \dfrac{13}{5}\right)$
$C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{AD} = (1,3,1) + \left(\dfrac{6}{5}, 0, \dfrac{8}{5}\right) = \left(\dfrac{11}{5}, 3, \dfrac{13}{5}\right)$

c) $V = \left|\left[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = | \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6/5 & 0 & 8/5 \end{vmatrix} | = |-12| = 12\ u^3$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0,75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75,17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Solución:

a) $P(100 \le X \le 140) = P\left(\dfrac{100-100}{35} \le Z \le \dfrac{140-100}{35}\right) = P(0 \le Z \le 1,14) =$
$P(Z \le 1,14) - P(Z \le 0) = 0,8729 - 0,5 = 0,3729 = 37,29\,\%$

b) $P(X \le 95) = P\left(Z \le \dfrac{95-100}{35}\right) = P(Z \le -0,14) = 1 - P(Z \le 0,14) = 1 - 0,5557 = 0,4443$

c) $P(X \ge a) = P\left(Z \ge \dfrac{a-100}{35}\right) = P\left(Z \le \dfrac{-a+100}{35}\right) = 0,7517 \Longrightarrow \dfrac{-a+100}{35} = 0,68 \Longrightarrow$
$a = 76,2$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2023)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^tB = C$.

b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^tB = \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2m^2-2=0 \\ -m=-1 \\ -2m=-2 \\ 3m=3 \end{cases} \Longrightarrow m=1$$

b) $AC = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix}$

$|AC| = 3m^3 + m + 10 = 0$ No tiene solución $\Longrightarrow \exists (AC)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}$

Si $m = 0 \Longrightarrow AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$

$B - I = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = B - I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 4m^2-1=2m-1 \\ -2m=-1 \\ 2m=1 \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0,5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

Solución:

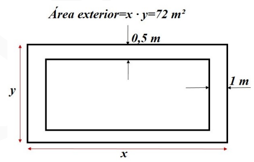
a) Relación de las dos variables: $x \cdot y = 72 \Longrightarrow y = \dfrac{72}{x}$

Función a optimizar $S(x, y) = (x-2)(y-1)$

Sustituyendo: $S(x) = (x-2)\left(\dfrac{72}{x} - 1\right) = \dfrac{-x^2 + 74x - 144}{x}$

$S'(x) = \dfrac{-x^2 + 144}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 12$

La solución negativa no es relevante.



	$(0, 12)$	$(12, \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, 12)$ y decrece en el $(12, \infty)$ con un máximo relativo en $x = 12$ m$\Longrightarrow y = \dfrac{72}{12} = 6$ m.

b) $S(12) = 50$ m^2.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (0, 1, 2)$;
- s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$;
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0,75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

Solución:

a) Tenemos:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u} = (0, 1, 2) \\ P_r = P(1, 1, 2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=1+\dfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,1/2)=\dfrac{1}{2}(2,-2,1) \\ P_s(0,4,1) \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(0,4,1)-(1,1,2)=(-1,3,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Tenemos $\overrightarrow{u_r}=(0,1,2)$ y $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_s}=(2,-2,1)$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|(0,1,2)\cdot(2,-2,1)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{3\sqrt{5}}=0\Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}=90^\circ$$

$$r\perp t$$

.

c) Primero calculamos un plano $\pi\perp s$ que contenga $P(1,1,2)$:
$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_s}=(2,-2,1)\Longrightarrow \pi: 2x-2y+z+\lambda=0$ sustituyendo P en $\pi \Longrightarrow 2-2+2+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-2\Longrightarrow \pi: 2x-2y+z-2=0$
La proyección de P sobre s será el punto P' de corte de π con s:

$$2(2\lambda)-2(4-2\lambda)+(1+\lambda)-2=0\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow P'(2,2,2)$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Sabiendo que $P(A\cup B)=\dfrac{4}{5}$, $P(\overline{A})=\dfrac{9}{20}$ y $P(\overline{B})=\dfrac{7}{20}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A}\cap\overline{B})$

b) (0,75 puntos) Calcular razonadamente $P(\overline{A}\cup\overline{B})$

c) (0,5 puntos) Calcular razonadamente $P(A-B)$

d) (0,5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

Solución:

a) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$

b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{9}{20}+\dfrac{7}{20}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$

c) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{11}{20}+\dfrac{13}{20}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$
$P(A-B)=P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{11}{20}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{20}$

d) $P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}\neq P(A)\cdot P(B)=\dfrac{11}{20}\cdot\dfrac{13}{20}\Longrightarrow A$ y B no son independientes.