Examen de Matemáticas II (Extraodinaria-Coincidente 2023) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$, Determine los valores de a, b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz $A+B$ no tiene inversa.
- la matriz $AB-C$ es igual a la matriz identidad.

Solución:

☛ $AB = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2a+4 \\ 2(2b+2c+1) & 12 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2a+4 \\ 2(2b+2c+1) & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2(2b+2c+1) \\ 2a+4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$2a+4 = 2(2b+2c+1) \Longrightarrow a-2b-2c = -1$

☛ $A+B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 4 \\ b+c+2 & 6 \end{pmatrix}$

$|A+B| = 2(3a-2b-2c-1) = 0 \Longrightarrow 3a-2b-2c = 1$

☛ $AB - C = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a+2(b+c) & 2a+4 \\ 2(2b+2c+1) & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} a+2b+c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a+2b+c = 1$

☛ $\left\{\begin{array}{l} a-2b-2c=-1 \\ 3a-2b-2c=1 \\ a+2b+c=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{array}\right.$

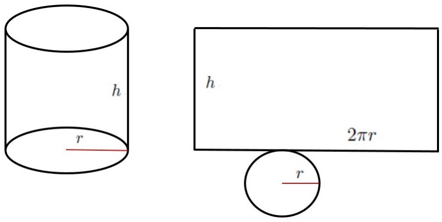
Por Gauss:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} 2a = 2 \Longrightarrow a = 1 \\ 2a - c = 0 \Longrightarrow c = 2 \\ 1 - 2b - 4 = -1 \Longrightarrow b = -1 \end{array}\right.$

Problema 2 (2,5 puntos) Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen 432π dm^3 para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2. Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.

Solución:



- ☛ $V = 432\pi = \pi r^2 h \Longrightarrow h = \dfrac{432}{r^2}$
- ☛ Área lateral $S_l(r,h) = 2\pi r h \Longrightarrow$
  $S_l(r) = 2\pi r \dfrac{432}{r^2} = \dfrac{864\pi}{r}$. La pérdida por este área sería: $P_l(r) = 0,1\dfrac{864\pi}{r} = \dfrac{86,4\pi}{r}$
- ☛ Área de la base $S_b(r) = \pi r^2$. La pérdida por este área sería: $P_b(r) = 0,2\pi r^2$
- ☛ La pérdida total $P_t(r) = 0,2\pi r^2 + \dfrac{86,4\pi}{r} = \dfrac{\pi(r^3+432)}{5r}$
- ☛ $P_t'(r) = \dfrac{2\pi(r^3-216)}{5r^2} = 0 \Longrightarrow r = 6$ dm

	$(0,6)$	$(6,\infty)$
$P_t'(r)$	$-$	$+$
$P(r)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en $(0,6)$ y creciente en $(6,\infty)$ con un mínimo relativo para un radio de 6 dm con una pérdida total y mínima de $P_t(6) = \dfrac{108\pi}{5} \simeq 67,858$ cl. La altura del depósito es de $h = \dfrac{432}{r^2} = \dfrac{432}{36} = 12$ dm

Problema 3 (2,5 puntos) Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}; \quad s \equiv \left\{\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s, y calcule su intersección si existe.

b) (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a r y s.

c) (0,5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(0,1,2) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{array}\right.$$

$$s: \left\{\begin{array}{l} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow s: \left\{\begin{array}{l} x = 1-2\mu \\ y = 1+\mu \\ z = \mu \end{array}\right. \Longrightarrow s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ P_s(1,1,0) \end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,1,0)-(0,1,2) = (1,0,-2)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ está en el mismo plano.}$$

Como Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

$$\begin{cases} \lambda = 1 - 2\mu \\ 1 - \lambda = 1 + \mu \\ 2 + \lambda = \mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Longrightarrow P_{\text{corte}}(-1, 2, 1)$$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2, 1, 1) \\ P_s(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 3y - z + 5 = 0$

$$\pi : 2x + 3y + z - 5 = 0$$

c) $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \dfrac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow \alpha = 61^\circ 52' 28''$

Problema 4 (2,5 puntos) Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.

a) (0,5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso "el resultado es un número primo".

b) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.

c) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

Solución:

a) $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$P(\text{primo}) = \dfrac{4}{9} = 0,4444444444$

b) $\Omega =$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	12	13	14	15	16	17	18	19	20

$\Longrightarrow P(\text{par}) = \dfrac{41}{81} = 0,5061728395$

c) Sea P suma par, I suma impar y $Pr1$ primo en el primer lanzamiento.

$P(Pr1|I) = \dfrac{P(Pr1 \cap I)}{P(I)} = \dfrac{\frac{19}{81}}{1 - \frac{41}{81}} = \dfrac{19}{40} = 0,475$

Examen de Matemáticas II (Extraodinaria-Coincidente 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1,8 euros y, si utiliza 0,25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1,9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

Solución:

Sean x coste kg de melocotón, y coste kg de pera y z coste kg de piña.

$$\left\{\begin{array}{c} 0,25x+0,25y+0,25z=1,8 \\ 0,25x+0,2y+0,3z=1,9 \\ 3000x+3000y+2000z=18000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+5y+5z=36 \\ 5x+4y+6z=38 \\ 3x+3y+2z=18 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2€ \\ y=1,6€ \\ z=3,6€ \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 36 \\ 5 & 4 & 6 & 38 \\ 3 & 3 & 2 & 18 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-F_1 \\ 5F_3-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -18 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5z=-18 \Longrightarrow z=3,6 \\ -y+3,6=2 \Longrightarrow y=1,6 \\ 5x+8+18=36 \Longrightarrow x=2 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la función $f(x)=x^4-4x-1$.

a) (0,5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de f.

b) (0,5 puntos) Justifique que la función f se anula en un punto del intervalo $[0,2]$.

c) (0,75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4-4x-1=0$ solo tiene dos raíces reales.

d) (0,75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función f y la recta $y=-4x$.

Solución:

a) $f'(x)=4x^3-4=0 \Longrightarrow x=1$

	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en $(-\infty,1)$ y creciente en $(1,\infty)$ con un mínimo relativo en $(1,-4)$.
Por la segunda derivada sería $f''(x)=12x^2 \Longrightarrow f''(1)=12>0 \Longrightarrow x=1$ es un mínimo relativo.

b) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y, por tanto, continua en $[0,2]$. Además $f(0)=-1<0$ y $f(2)=7>0$, por el teorema de Bolzano $\exists c\in(0,2)$ tal que $f(c)=0$.

c) Tenemos una función continua, que cumple:

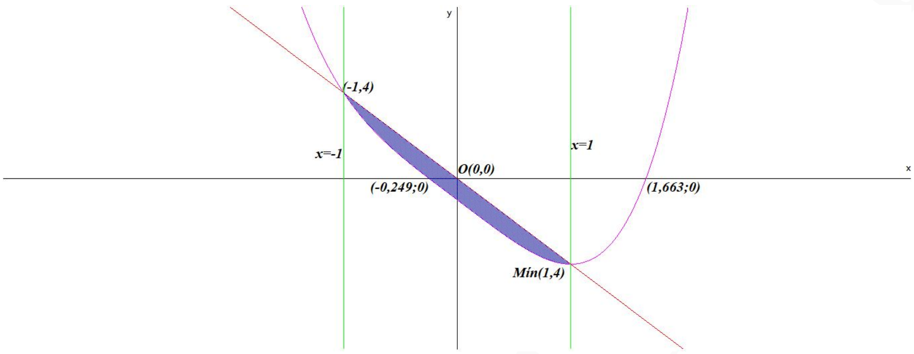
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- La función decrece $(-\infty, 1)$ y crece $(1, \infty)$ con un mínimo relativo en $(1, -4)$, por debajo del eje de abscisas.
- la función tiene que cortar necesariamente solo en dos puntos del eje de abscisas para llegar a ese mínimo.

d) Calculamos los cortes de ambas funciones: $x^4 - 4x - 1 = -4x \Longrightarrow x^4 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, solo habrá un recinto de integración $S_1 : [-1, 1]$.

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 1)\, dx = \left. \frac{x^5}{5} - x \right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{8}{5}$$

$$S = |S_1| = \frac{8}{5} \simeq 1,6\ u^2$$



Problema 3 (2,5 puntos) Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{array} \right.$ y el punto A$(4, -3, 4)$, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta r. ¿En qué punto de la recta se alcanza?

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 1) \\ P_r(4, -2, 0) \end{array} \right.$$

a) Para encontrar el punto de r más próximo a A calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $A \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 1) \Longrightarrow \pi : x - 2y + z + \lambda = 0 \overset{A \in \pi}{\Longrightarrow} 4 + 6 + 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -14 \Longrightarrow \pi : x - 2y + z - 14 = 0$.
Ahora calculamos el punto A' de corte entre π y r que será el buscado:

$$(4 + \lambda) - 2(-2 - 2\lambda) + \lambda - 14 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A'(5, -4, 1)$$

$$|\overrightarrow{AA'}| = |(5, -4, 1) - (4, -3, 4)| = |(1, -1, -3)| = \sqrt{11}\ u$$

Otra forma de calcular la distancia:

$\overrightarrow{P_rA} = (4,-3,4) - (4,-2,0) = (0,-1,4)$

$$\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rA}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}\right| = |(-7,-4,-1)| = \sqrt{66}$$

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rA}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}\ u$$

b) Calculado en el apartado anterior: $\pi : x - 2y + z - 14 = 0$
Este plano cortará con los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en puntos de los ejes coordenados:
Con OX es $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow x = 14 \Longrightarrow P(14,0,0)$
Con OY es $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow y = -7 \Longrightarrow Q(0,-7,0)$
Con OZ es $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow z = 14 \Longrightarrow H(0,0,14)$
$\overrightarrow{OP} = (14,0,0)$, $\overrightarrow{OQ} = (0,-7,0)$ y $\overrightarrow{OH} = (14,0,0)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OH}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-1372| = \frac{686}{3}\ u^3$$

Problema 4 (2,5 puntos) Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85 % en tiros libres y del 20 % en tiros desde el centro del campo.

a) (1,5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?

b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20 % de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

Solución:

a) Para tiros libres $B(4; 0,85) \Longrightarrow P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,85^3 \cdot 0,15^1 = 0,368475$

Para tiros desde el centro del campo $B(4; 0,2) \Longrightarrow P(Y = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^1 = 0,0256$

$P(\{X = 3\} \cap \{Y = 3\}) = 0,368475 \cdot 0,0256 = 0,00943296$

b) $n = 200 > 10$, $np = 200 \cdot 0,15 = 30 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,85 = 170 > 5 \Longrightarrow$
$B(200; 0,15) \overset{N\left(np,\sqrt{npq}\right)}{\approx} N(30; 5,05)$

$$P(X \geq (0,2 \cdot 200)) = P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{39,5 - 30}{5,05}\right) = P(Z \geq 1,88) =$$

$$1 - P(Z \leq 1,88) = 1 - 0,9699 = 0,0301$$